

НЕСТАЦІОНАРНІ ПОБІЧНІ РУХИ ДВОХКУЛЬОВОГО (ДВОХМАЯТНИКОВОГО) АВТОБАЛАНСИРА

Вступ. Для зрівноважування роторів на закритичних швидкостях обертання застосовуються кульові, маятникові або кільцеві автобалансувальні пристрої (АБП) [1]. Коригувальні вантажі (КГ) у таких пристроях на закритичних швидкостях обертання ротора самі приходять у положення, у якому зрівноважують ротор і далі обертаються з ним як одне ціле, поки не почне мінятися дисбаланс, швидкість обертання ротора або не з'являться інші збурювання. Традиційно дослідження динаміки АБП зводилося до дослідження стійкості тих усталених рухів ротора й АБП, у яких КГ обертаються синхронно з ротором [1-4]. При цьому критерієм працездатності пристроїв була стійкість принаймні одного основного руху (у ньому ротор зрівноважений) і нестійкість усіх побічних рухів (у них ротор розбалансований). Експериментальні дослідження динаміки двохкульових АБП, проведені в роботі [5] встановили існування побічних нестационарних рухів, у яких кулі щільно притиснуті одна до одної й обертаються навколо осі вала ротора (щодо землі) з резонансною частотою. У зв'язку з цим виникають питання: чи можна в рамках плоскої моделі ротора одержати ці рухи; при яких співвідношеннях між параметрами системи ці рухи будуть відбуватися. Нижче вирішуються ці питання і відповідно до результатів уточнюється критерій працездатності АБП.

1. Опис моделі ротора й АБП. Для дослідження динаміки системи прийнята плоска модель ротора і АБП [2], яка придатна як для кульового, так і маятникового пристроїв. У рамках цієї моделі ротор – симетричний плоский диск маси M , насаджений з ексцентриситетом e на абсолютно жорсткий вал, перпендикулярний його площині (рис. 1). Ротор розташований вертикально, рухається плоскопараллельно й обертається зі сталою кутовою швидкістю ω . Його утримують ізотропні в'язко-пружні опори. Співосно валу ротора встановлена кільцева бігова доріжка, радіуса R і по доріжці рухаються 2 однакових кулі, масою m , які розглядаються як матеріальні точки. У

випадку маятникового АБП – 2 однакових математичних маятника, масою m і довжиною R насаджені на вал ротора. У подальшому, для більшої стислості, будемо докладно описувати модель тільки для кульового АБП. Рух системи визначається відносно правої системи нерухомих прямокутних осей X, Y . Положення куль визначається кутами $\varphi_j, /j=1,2/$ які відраховуються від додатного напрямку осі U , паралельної осі X . При русі j -ої кулі по доріжці на її діє сила в'язкого опору $\alpha R(\omega - \varphi'_j)$, де α - коефіцієнт в'язкого опору, штрих над величиною означає похідну за часом, і $R(\varphi'_j - \omega)$ - швидкість руху кулі по доріжці. При нерухомому роторі вал суміщений з віссю обертання. У процесі руху вал, на рис. 1 точка K , відхиляється від осі обертання, точки O , і на нього починають діяти оновлююча сила, і сила в'язкого опору середовища (на рис. 1 не показані)

$$\vec{F}_c = -(xc, yc), \quad \vec{F}_\beta = -(x'\beta, y'\beta), \quad (1)$$

де x, y – координати, що визначають положення вала щодо осей X, Y ;
 c, β - коефіцієнти жорсткості і демпфірування в опорах ротора.

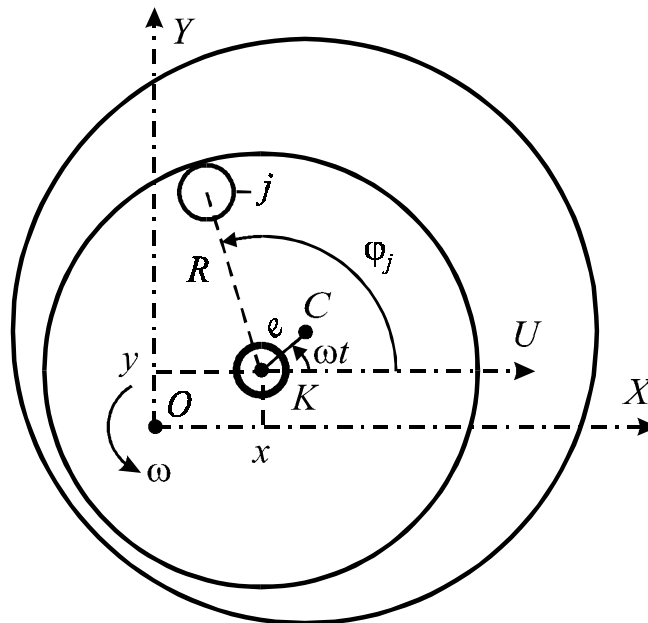


Рисунок 1 - Плоска модель ротора і кульового (маятникового) АБП

Для такої моделі ротора й АБП рівняння динаміки мають вигляд [3]:

$$\varphi_j'' + \frac{\alpha}{m}(\varphi'_j - \omega) - \frac{1}{R}(x'' \sin \varphi_j - y'' \cos \varphi_j) = 0, \quad /j = 1, 2/,$$

$$\begin{aligned}
M_{\Sigma}x'' + \beta x' + cx - mR \sum_{j=1}^2 (\varphi_j'' \sin \varphi_j + \varphi_j'^2 \cos \varphi_j) - Me\omega^2 \cos \omega t &= 0, \\
M_{\Sigma}y'' + \beta y' + cy + mR \sum_{j=1}^2 (\varphi_j'' \cos \varphi_j - \varphi_j'^2 \sin \varphi_j) - Me\omega^2 \sin \omega t &= 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

де $M_{\Sigma} = M + 2m$ – маса всієї системи. Таким чином динаміку системи характеризують 8 розмірних параметрів (причому враховано, що M_{Σ} виражається через ці параметри):

$$m, R, \alpha, \omega, M, e, c, \beta. \tag{3}$$

2. Приведення рівнянь руху до безрозмірного вигляду. Для виділення істотно відмінних (незалежних) параметрів, що характеризують динаміку системи, приведемо отримані рівняння до безрозмірного вигляду. Визначимо резонансну частоту обертання ротора рівністю:

$$\omega_0 = \sqrt{c/M_{\Sigma}}. \tag{4}$$

Це частота власних коливань ротора при нерухомих кулях і відсутності обертання ротора. Уведемо безрозмірні параметри

$$R_m = \frac{2m}{M_{\Sigma}}, \quad h = \frac{\alpha}{\omega_0 m}, \quad H = \frac{\beta}{2\omega_0 M_{\Sigma}}, \quad R_{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad e_0 = \frac{Me}{2mR}. \tag{5}$$

Уведемо безрозмірні змінні і час

$$\xi = \frac{x}{R_m R}, \quad \eta = \frac{y}{R_m R}, \quad \tau = \omega_0 t \quad \left(\frac{d}{dt} = \omega_0 \tau \right). \tag{6}$$

Поділимо перші два рівняння в (2) на ω_0^2 , і останні два рівняння – на $2mR\omega_0^2$. З огляду на (4-6), одержимо рівняння динаміки в безрозмірному вигляді:

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi}_j + h(\dot{\varphi}_j - R_{\omega}) - R_m [\ddot{\xi} \sin \varphi_j - \dot{\eta} \cos \varphi_j] &= 0, \quad / j = \overline{1,2} / , \\
\ddot{\xi} + 2H\dot{\xi} + \xi - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (\ddot{\varphi}_j \sin \varphi_j + \dot{\varphi}_j^2 \cos \varphi_j) &= e_0 R_{\omega}^2 \cos R_{\omega} \tau, \\
\ddot{\eta} + 2H\dot{\eta} + \eta + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (\ddot{\varphi}_j \cos \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 \sin \varphi_j) &= e_0 R_{\omega}^2 \sin R_{\omega} \tau,
\end{aligned} \tag{7}$$

де крапка над змінною означає похідну по τ . Таким чином динаміку системи характеризують 5 істотно відмінних безрозмірних параметрів, визначених у (5).

Уведемо комплексну змінну

$$z = \xi + i\eta. \quad (8)$$

З огляду на те, що

$$\cos \varphi_j + i \sin \varphi_j = e^{i\varphi_j}, \quad i \operatorname{Im} \dot{z} e^{-i\varphi_j} = \ddot{\xi} \sin \varphi_j + \dot{\eta} \cos \varphi_j, \quad (9)$$

приводимо рівняння динаміки (7) до вигляду

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_j + h(\dot{\varphi}_j - R_\omega) - iR_m \operatorname{Im} \dot{z} e^{-i\varphi_j} &= 0, \quad / j = \overline{1,2} / , \\ \ddot{z} + 2H\dot{z} + z - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (\dot{\varphi}_j^2 - i\ddot{\varphi}_j) e^{i\varphi_j} &= e_0 R_\omega^2 e^{iR_\omega \tau}. \end{aligned} \quad (10)$$

3. Виділення квазіперіодичних рухів. У відповідності з експериментальними даними, шукаємо квазіперіодичні розв'язки системи рівнянь (10), у яких у нульовому наближенні кулі обертаються навколо вала зі сталою кутовою швидкістю. Покладаючи

$$\ddot{\varphi}_j = 0, \quad \dot{\varphi}_j = \omega_j, \quad \varphi_j = \omega_j \tau + \gamma_j, \quad / j = \overline{1,2} / , \quad (11)$$

приводимо систему (10) до вигляду

$$\begin{aligned} h(\omega_j - R_\omega) - iR_m \operatorname{Im} \dot{z} e^{-i(\omega_j \tau + \gamma_j)} &= 0, \quad / j = \overline{1,2} / , \\ \ddot{z} + 2H\dot{z} + z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \omega_j^2 e^{i(\omega_j \tau + \gamma_j)} + e_0 R_\omega^2 e^{iR_\omega \tau}. \end{aligned} \quad (12)$$

Розв'язок останнього рівняння в (12) має вигляд

$$z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\omega_j^2 e^{i(\omega_j \tau + \gamma_j)}}{1 - \omega_j^2 + 2iH\omega_j} + \frac{e_0 R_\omega^2 e^{iR_\omega \tau}}{1 - R_\omega^2 + 2iHR_\omega}. \quad (13)$$

З (13) знаходимо

$$\ddot{z} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\omega_j^4 e^{i(\omega_j \tau + \gamma_j)}}{1 - \omega_j^2 + 2iH\omega_j} - \frac{e_0 R_\omega^4 e^{iR_\omega \tau}}{1 - R_\omega^2 + 2iHR_\omega}. \quad (14)$$

Далі

$$\begin{aligned} \dot{z} e^{-i(\omega_1 \tau + \gamma_1)} &= -\frac{1}{2} \frac{\omega_1^4}{1 - \omega_1^2 + 2iH\omega_1} - \frac{1}{2} \frac{\omega_2^4 e^{i[(\omega_2 - \omega_1)\tau + \gamma_2 - \gamma_1]}}{1 - \omega_2^2 + 2iH\omega_2} - \frac{e_0 R_\omega^4 e^{i[(R_\omega - \omega_1)\tau - \gamma_1]}}{1 - R_\omega^2 + 2iHR_\omega}, \\ \dot{z} e^{-i(\omega_2 \tau + \gamma_2)} &= -\frac{1}{2} \frac{\omega_1^4 e^{-i[(\omega_2 - \omega_1)\tau + \gamma_2 - \gamma_1]}}{1 - \omega_1^2 + 2iH\omega_1} - \frac{1}{2} \frac{\omega_2^4}{1 - \omega_2^2 + 2iH\omega_2} - \frac{e_0 R_\omega^4 e^{i[(R_\omega - \omega_2)\tau - \gamma_2]}}{1 - R_\omega^2 + 2iHR_\omega}. \end{aligned} \quad (15)$$

З (12) випливає, що оскільки $h(\omega_j - R_\omega) = \text{const}_j$, $/ j = \overline{1,2} /$, то і праві частини рівностей (15) повинні бути сталими. У “нульовому” наближенні це можливо тільки при наступних допущеннях

$$\omega_1 = \omega_2 = \Omega, \quad e_0 \ll 1. \quad (16)$$

Звідси випливає, що малим параметром є дисбаланс (e_0). З врахуванням (16) рівності (15) приймуть у нульовому наближенні ($e_0 = 0$) вигляд

$$\ddot{z}e^{-i(\Omega+\gamma_1)} = -\frac{1}{2} \frac{\Omega^4(1+e^{i(\gamma_2-\gamma_1)})}{1-\Omega^2+2iH\Omega}, \quad \ddot{z}e^{-i(\Omega+\gamma_2)} = -\frac{1}{2} \frac{\Omega^4(1+e^{-i(\gamma_2-\gamma_1)})}{1-\Omega^2+2iH\Omega}. \quad (17)$$

З (12), (16) і (17) випливає, що в нульовому наближенні

$$\text{Im} \frac{1+e^{i(\gamma_2-\gamma_1)}}{1-\Omega^2+2iH\Omega} = \text{Im} \frac{1+e^{-i(\gamma_2-\gamma_1)}}{1-\Omega^2+2iH\Omega}. \quad (18)$$

Рівність (18) може виконуватися в двох різних випадках

$$1) \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma; \quad 2) \quad \gamma_1 = \gamma, \quad \gamma_2 = \gamma + \pi. \quad (19)$$

1. Розглянемо перший випадок. Перші два рівняння в (12) приймають однаковий вигляд

$$h(\Omega - R_\omega) + \frac{2R_m H \Omega^5}{(1-\Omega^2)^2 + 4H^2 \Omega^2} = 0,$$

або

$$\frac{h(R_\omega - \Omega)[(1-\Omega^2)^2 + 4H^2 \Omega^2] - 2R_m H \Omega^5}{(1-\Omega^2)^2 + 4H^2 \Omega^2} = 0. \quad (20)$$

Рівняння (20) має 5 коренів. Якщо припустити, що зовнішнє тертя (в опорах) H – мала величина, то їх можна представити такими розкладаннями

$$\Omega_{1/2} \approx 1 \mp \delta_1, \quad \Omega_{3/4} \approx -1 \pm \delta_2, \quad \Omega_5 \approx R_\omega, \quad \delta_{1/2} \approx \sqrt{\pm \frac{R_m H}{h(R_\omega \mp 1)}}, \quad H \ll 1. \quad (21)$$

де верхній знак відповідає верхньому індексові, а нижній – нижньому. Будемо розрізняти рухи системи по відповідних кутових швидкостях Ω_j $/ j = \overline{1,5} /$. Тоді в нульовому наближенні в рухах $\Omega_{1,2}$ кулі притиснуті одна до одної й обертаються навколо вала зі сталою кутовою швидкістю, близькою до резонансної, причому $\Omega_1 < 1 < \Omega_2$. Рухи $\Omega_{3,4}$ не можуть здійснюватися, бо поправки до кутових швидкостей ($\pm \delta_2$) – уявні числа. Рух Ω_5 не представляє інтересу, тому що кулі в ньому обертаються

синхронно з ротором. Очевидно, цьому випадкові відповідають раніше відомі побічні рухи двохкульового АБП, у яких кулі притиснуті одна до одної і відхилені у важкий або легкий бік ротора.

У випадках рухів $\Omega_{1,2}$ рівність (13), що приблизно визначає закон руху осі вала, приймає вигляд

$$z_{1/2} = \frac{\Omega_{1/2}^2 e^{i(\Omega_{1/2}\tau + \gamma)}}{1 - \Omega_{1/2}^2 + 2iH\Omega_{1/2}} + \frac{e_0 R_\omega^2 e^{iR_\omega\tau}}{1 - R_\omega^2 + 2iHR_\omega}. \quad (22)$$

З (22) видно, що рух осі вала є сумою двох рухів:

- 1) “повільної” прецесії з навколо резонансною частотою $\Omega_{1/2}$;
- 2) “швидкої” нутації з частотою, рівною швидкості обертання ротора R_ω .

Перехід до дійсних безрозмірних координат дає наступні наближені закони руху осі вала

$$\xi_{1/2} = a(\Omega_{1/2}) \cos(\Omega_{1/2}\tau + \gamma) + b(\Omega_{1/2}) \sin(\Omega_{1/2}\tau + \gamma) + a(R_\omega) \cos R_\omega\tau + b(R_\omega) \sin R_\omega\tau,$$

$$\eta_{1/2} = a(\Omega_{1/2}) \sin(\Omega_{1/2}\tau + \gamma) - b(\Omega_{1/2}) \cos(\Omega_{1/2}\tau + \gamma) + a(R_\omega) \sin R_\omega\tau - b(R_\omega) \cos R_\omega\tau,$$

$$a(\omega) = \frac{\omega^2(1 - \omega^2)}{(1 - \omega^2)^2 + 4H^2\omega^2}, \quad b(\omega) = \frac{2H\omega^3}{(1 - \omega^2)^2 + 4H^2\omega^2}. \quad (23)$$

Рівність (22), або рівності (23) визначають два однопараметричних сімейства нестационарних рухів, які залежать від параметра γ . У відповідності з ними вісь вала за період прецесії рухається по: замкненій гіпоциклоїді, якщо швидкість нутації R_ω перевищує швидкість прецесії $\Omega_{1/2}$ в ціле число разів; розімкнутій гіпоциклоїді, якщо - не в ціле. Крім того, побічні рухи $\Omega_{1,2}$: періодичні, якщо відношення частоти нутації до частоти прецесії – раціональне число; неперіодичні, якщо – нерациональне.

2. Розглянемо другий випадок. З (12), з врахуванням (18) і (19) випливає, що

$$h(\omega_j - R_\omega) = 0, \quad / j = \overline{1,2} /.$$

Звідси знаходимо, що в нульовому наближенні $\omega_j = R_\omega$, $/ j = \overline{1,2} /$, тобто кулі синхронно обертаються разом з ротором. Такий випадок не представляє інтересу, тому що це один з відомих раніше усталених рухів двохкульового АБП, у якому кулі знаходяться одна навпроти одної.

Висновки.

1. В рамках плоскої моделі ротора і двохкульового (двохмаятникового) АБП, при невеликих дисбалансах існують два однопараметричних сімейства нестационарних рухів, у яких кулі (маятники) притиснуті одна до одної й обертаються навколо повздовжньої осі ротора в напрямку обертання ротора з навколо резонансною частотою $\Omega_1 < 1$ або $\Omega_2 > 1$, а вісь вала ротора рухається по гіпоциклоїді, що утворена сумою двох рухів: “повільної” прецесії з навколо резонансною частотою $\Omega_{1/2}$; “швидкої” нутації з частотою, рівною швидкості обертання ротора R_ω .

2. Побічні нестационарні рухи $\Omega_{1,2}$ - періодичні, якщо відношення частоти нутації до частоти прецесії – раціональне число, або неперіодичні, якщо – нераціональне.

3. Для працездатності АБП додатково необхідно, щоб нестационарні побічні рухи були нестійкі, або не існували.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гусаров А.А., Сусанин В.И., Шаталов Л.Н., Грушин Б.М. Автоматическая балансировка роторов машин. -М.: Наука, 1997. -151 с.
2. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. -М.: Наука, 1971. -896с.
3. Нестеренко В.П. Учет вязкого сопротивления при определении условий балансировки // Известия Вузов. Машиностроение. -1989. -4. -4. -С.39-41.
4. Филимонихин Г.Б. К устойчивости основного движения двухмаятникового автобалансира // Доп. НАН України. Сер.А. - 1996. - №8. - С. 74-78.
5. Филимонихин Г.Б. Универсальный стенд для исследования динамики пассивных автобалансиров и его апробация шаровым автобалансиром // Збірник наукових праць КДТУ, -2001. Вип. №9, -С.101-107.