

Г.Б.Филимонихин,
А.Б.Чайковский,
В.М. Майоров

ПЛОСКАЯ МОДЕЛЬ РОТОРА, УРАВНОВЕШИВАЕМОГО МАЯТНИКОВЫМ АВТОБАЛАНСИРОМ СО СВЯЗЯМИ*

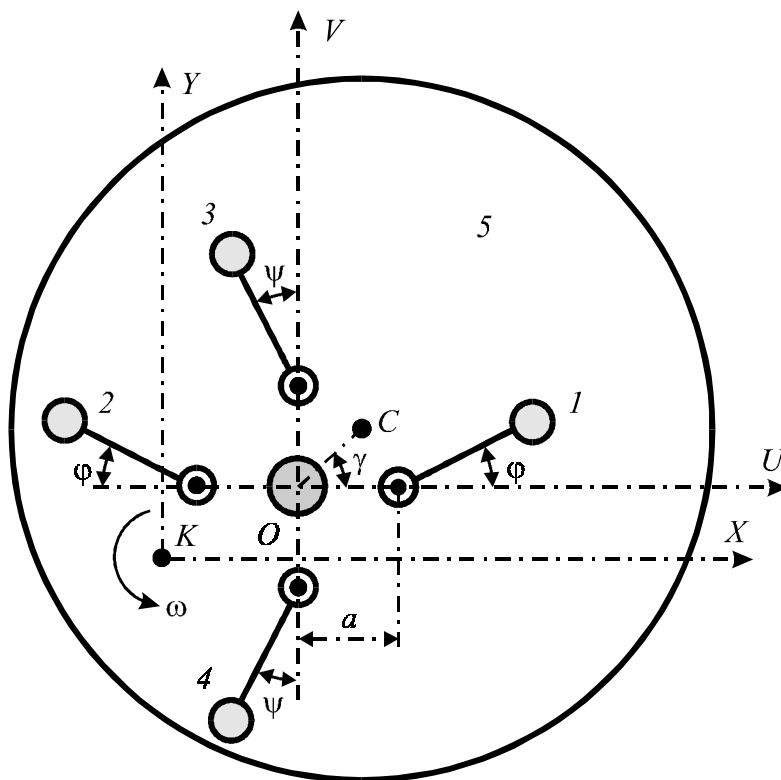
Для балансировки роторов на закритической частоте вращения применяются маятниковые автобалансирующие устройства (АБУ) [1], представляющие собой два диска, установленные соосно валу ротора, несущие четыре оси, на которых могут свободно поворачиваться маятники. Расстояние a от осей маятников до центров дисков больше максимально допустимого отклонения оси вала в месте установки АБУ. Устройства применяются для балансировки роторов, как с вертикально, так и горизонтально расположенной осью вращения.

Маятниковые АБУ работают следующим образом [1]. При вращении ротора с закритической скоростью вращения маятники отклоняются в легкую сторону ротора, в связи с чем, уменьшают суммарный дисбаланс системы. При случайном изменении частоты вращения ротора, а также в режиме его разгона или торможения, маятники движутся хаотически, причем под действием тангенциальных составляющих сил инерции сталкиваются между собой. Последнее является существенным недостатком таких устройств.

В [2] впервые предложено, с целью уменьшения чувствительности маятников к изменению скорости вращения ротора на их движения накладывать механические связи, позволяющие маятникам попарно поворачиваться относительно ротора на равные углы в противоположные стороны. В [3] исследована эффективность работы предложенного автобалансира.

Для исследования динамики АБУ со связями построим плоскую модель ротора и АБУ. В рамках этой модели ротор - симметричный плоский диск массы M , насаженный с эксцентриситетом e на абсолютно жесткий вал, перпендикулярный его плоскости. Маятники - невесомые стержни длины l , несущие на своём конце сосредоточенные массы m . Они насажены на четыре оси, симметрично расположенные относительно вала ротора на расстоянии a (рисунок). Маятники могут быть выстроены вдоль двух взаимно перпендикулярных прямых U , V , жестко связанных с ротором. Во время движения маятники 1, 2 (3, 4) поворачиваются относительно ротора на равные углы ϕ (ψ) в противоположные стороны. При повороте маятника вокруг оси на него действует момент сил вязкого сопротивления $H_1\dot{\phi}$ ($H_1\dot{\psi}$), здесь точка над величиной означает производную по времени. При неподвижном роторе вал совмещен с осью вращения. В процессе движения вал, на рисунке точка O , отклоняется от оси вращения, точки K , и на него начинают действовать восстанавливающая сила $-c\vec{r}_0$ и сила вязкого сопротивления среды $-H_2\vec{v}_0$, здесь $\vec{r}_0 = \overline{KO}$, $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0$.

Положение вала определяется координатами x, y относительно подвижных осей X, Y , выходящих из точки K и параллельных осям U, V .



1, 2 - первая пара маятников; 3, 4 - вторая пара маятников; 5 - уравнивающий ротор; C - центр масс ротора; O - вал ротора; K - ось вращения.

Рисунок - Плоская модель ротора и маятникового АБУ со связями

Полагаем, что ротор расположен вертикально и вращается вокруг оси вращения с постоянной угловой скоростью ω .

Для вывода уравнений движения системы воспользуемся общим уравнением динамики. Приложим к ротору и маятникам активные силы и силы инерции

$$\vec{F}_{yn} = -c\vec{r}_0, \quad \vec{F}_{con} = -H_2\vec{v}_0, \quad M_{1,2} = -H_1\dot{\phi}, \quad M_{3,4} = -H_1\dot{\psi}$$

$$\vec{I} = -M\vec{a}_C, \quad \vec{I}_j = -m\vec{a}_j, \quad (j = \overline{1,4}). \quad (1)$$

Здесь: \vec{F}_{yn} - сила упругости опор; \vec{F}_{con} - сила вязкого сопротивления среды; M_j - момент, образуемый силами вязкого трения, возникающими между j -м маятником и осью (условно отнесен к активным силам); \vec{I} - главный вектор сил инерции ротора; \vec{I}_j - равнодействующая сил инерции j -о маятника; c - параметр, характеризующий упругую податливость опор; H_j , ($j=1, 2$) - параметры, характеризующие внешнее и внутреннее трение в системе.

Для ротора и АБУ общее уравнение динамики имеет вид:

$$\vec{I} \cdot \delta \vec{r}_C + \sum_{j=1}^4 \vec{I}_j \cdot \delta \vec{r}_j + (\vec{F}_{yn} + \vec{F}_{con}) \cdot \delta \vec{r}_0 - 2H_1 \dot{\phi} \delta \phi - 2H_1 \dot{\psi} \delta \psi = 0. \quad (2)$$

Обозначим через \vec{e}_z - единичный вектор, направленный из плоскости рисунка на нас. Обозначим через $\vec{\rho}_j$ вектор, направленный вдоль j -о маятника. Учитывая, что

$$\delta \vec{r}_{1/2} = \delta \vec{r}_0 \pm \vec{e}_z \times \vec{\rho}_{1/2} \delta \phi, \quad \delta \vec{r}_{3/4} = \delta \vec{r}_0 \pm \vec{e}_z \times \vec{\rho}_{3/4} \delta \psi, \quad \delta \vec{r}_C = \delta \vec{r}_0,$$

преобразовываем (2) к виду

$$\left[\vec{I} + \sum_{j=1}^4 \vec{I}_j + \vec{F}_{yn} + \vec{F}_{con} \right] \cdot \delta \vec{r}_0 + \left[\vec{e}_z \cdot (\vec{\rho}_1 \times \vec{I}_1 - \vec{\rho}_2 \times \vec{I}_2) - 2H_2 \dot{\phi} \right] \cdot \delta \phi + \\ + \left[\vec{e}_z \cdot (\vec{\rho}_3 \times \vec{I}_3 - \vec{\rho}_4 \times \vec{I}_4) - 2H_2 \dot{\psi} \right] \delta \psi = 0.$$

Так как $\delta \vec{r}_0$, $\delta \phi$, $\delta \psi$ - независимы, то получаем уравнения динамики в следующем виде:

$$\vec{I} + \sum_{j=1}^4 \vec{I}_j + \vec{F}_{yn} + \vec{F}_{con} = 0, \quad \vec{e}_z \cdot (\vec{\rho}_1 \times \vec{I}_1 - \vec{\rho}_2 \times \vec{I}_2) - 2H_1 \dot{\phi} = 0, \\ \vec{e}_z \cdot (\vec{\rho}_3 \times \vec{I}_3 - \vec{\rho}_4 \times \vec{I}_4) - 2H_1 \dot{\psi} = 0. \quad (3)$$

Если ротор уравновешивает одна пара маятников (маятники 3, 4), то уравнения динамики принимают вид

$$\vec{I} + \vec{I}_3 + \vec{I}_4 + \vec{F}_{yn} + \vec{F}_{con} = 0, \quad \vec{e}_z \cdot (\vec{\rho}_3 \times \vec{I}_3 - \vec{\rho}_4 \times \vec{I}_4) - 2H_1 \dot{\psi} = 0. \quad (4)$$

Подставляя (1) в уравнения (3), (4) (раскрывая векторные и скалярные произведения и проектируя на координатные оси) преобразуем последние к виду:

- для двух пар маятников:

$$Ma_{ox} + m \sum_{j=1}^4 a_{jx} + H_2 v_{ox} + cr_{ox} = 0, \quad Ma_{oy} + m \sum_{j=1}^4 a_{jy} + H_2 v_{oy} + cr_{oy} = 0, \\ m[\rho_{1x} a_{1y} - \rho_{1y} a_{1x} - \rho_{2x} a_{2y} + \rho_{2y} a_{2x}] + 2H_1 \dot{\phi} = 0, \\ m[\rho_{3x} a_{3y} - \rho_{3y} a_{3x} - \rho_{4x} a_{4y} + \rho_{4y} a_{4x}] + 2H_1 \dot{\psi} = 0; \quad (5)$$

- для одной пары маятников:

$$Ma_{ox} + m(a_{3x} + a_{4x}) + H_2 v_{ox} + cr_{ox} = 0, \quad Ma_{oy} + m(a_{3y} + a_{4y}) + H_2 v_{oy} + cr_{oy} = 0, \\ m[\rho_{3x} a_{3y} - \rho_{3y} a_{3x} - \rho_{4x} a_{4y} + \rho_{4y} a_{4x}] + 2H_1 \dot{\psi} = 0. \quad (6)$$

Из рисунка 1, в проекциях на оси X, Y , находим

$$\vec{r}_0(x, y), \quad \vec{r}_C(x + e \cos \gamma, y + e \sin \gamma), \\ \vec{r}_{1/2}(x \pm a \pm l \cos \phi, y + l \sin \phi), \quad \vec{r}_{3/4}(x - l \sin \psi, y \pm a \pm l \cos \psi), \\ \vec{\rho}_{1/2}(\pm l \cos \phi, l \sin \phi), \quad \vec{\rho}_{3/4}(-l \sin \psi, \pm l \cos \psi). \quad (7)$$

Учитывая, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью, в проекциях на эти же оси получим следующие выражения для скоростей и ускорений точек $O, C, 1-4$:

$$\begin{aligned}
& \bar{v}_0(\dot{x} - \omega y, \dot{y} + \omega x), \\
& \bar{v}_C(\dot{x} - \omega y - \omega e \sin \gamma, \dot{y} + \omega x + \omega e \cos \gamma), \\
& \bar{v}_{1/2}(\dot{x} - \omega y - l(\omega \pm \dot{\phi}) \sin \varphi, \dot{y} + \omega(x \pm a) \pm l(\omega \pm \dot{\phi}) \cos \varphi), \\
& \bar{v}_{3/4}(\dot{x} - \omega(y \pm a) \mp l(\omega \pm \dot{\psi}) \sin \psi, \dot{y} + \omega x - l(\omega \pm \dot{\psi}) \cos \psi), \\
& \bar{a}_0(\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x, \ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y), \\
& \bar{a}_C(\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2(x + e \cos \gamma), \ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2(y + e \sin \gamma)), \\
& \bar{a}_{1/2}(\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2(x \pm a) \mp l\ddot{\phi} \sin \varphi \mp (\omega \pm \dot{\phi})^2 l \cos \varphi, \\
& \quad \ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y + l\ddot{\phi} \cos \varphi - (\omega \pm \dot{\phi})^2 l \sin \varphi), \\
& \bar{a}_{3/4}(\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x - l\ddot{\psi} \cos \psi + (\omega \pm \dot{\psi})^2 l \sin \psi, \\
& \quad \ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2(y \pm a) \mp l\ddot{\psi} \sin \psi \mp (\omega \pm \dot{\psi})^2 l \cos \psi)
\end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя (7), (8) в (5), (6) окончательно получим:

- уравнения динамики для случая двух пар маятников:

$$\begin{aligned}
& M_{\Sigma}(\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x) - 2ml(\ddot{\psi} \cos \psi + 2\omega \dot{\phi} \cos \varphi - \\
& \quad - \dot{\psi}^2 \sin \psi - \omega^2 \left[\sin \psi - \frac{Me \cos \gamma}{2ml} \right]) + H_2(\dot{x} - \omega y) + cx = 0, \\
& M_{\Sigma}(\ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y) + 2ml(\ddot{\phi} \cos \varphi - 2\omega \dot{\psi} \cos \psi - \\
& \quad - \dot{\phi}^2 \sin \varphi - \omega^2 \left[\sin \varphi + \frac{Me \sin \gamma}{2ml} \right]) + H_2(\dot{y} + \omega x) + cy = 0, \\
& ml^2 \ddot{\phi} + H_1 \dot{\phi} + mla \omega^2 \sin \varphi + ml(\ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y) \cos \varphi = 0, \\
& ml^2 \ddot{\psi} + H_1 \dot{\psi} + mla \omega^2 \sin \psi - ml(\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x) \cos \psi = 0;
\end{aligned} \tag{9}$$

- уравнения динамики для случая одной пары маятников:

$$\begin{aligned}
& M_{\Sigma}(\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x) - 2ml(\ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \sin \psi - \\
& \quad - \omega^2 \left[\sin \psi - \frac{Me \cos \gamma}{2ml} \right]) + H_2(\dot{x} - \omega y) + cx = 0, \\
& M_{\Sigma}(\ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y) - 2ml \left(2\omega \dot{\psi} \cos \psi + \omega^2 \frac{Me \sin \gamma}{2ml} \right) + H_2(\dot{y} + \omega x) + cy = 0, \\
& ml^2 \ddot{\psi} + H_1 \dot{\psi} + mla \omega^2 \sin \psi - ml(\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x) \cos \psi = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

причем, в (9) $M_{\Sigma} = M + 4m$, в (10) $M_{\Sigma} = M + 2m$.

Из (9), (10) видно, что динамику как двухмаятникового, так и четырехмаятникового АБУ характеризуют десять параметров (при этом учтено, что M_{Σ} выражается через M и m):

$$M, e, \gamma, m, l, a, c, H_1, H_2, \omega. \tag{11}$$

Для выделения существенно различных (независимых) параметров, характеризующих динамику АБУ, приведем полученные уравнения к

безразмерному виду. Определим резонансную частоту вращения ротора равенством:

$$\omega_0 = \sqrt{c/M_\Sigma}. \quad (12)$$

Это частота собственных колебаний ротора при неподвижных маятниках и отсутствии вращения ротора. Введем безразмерные параметры

$$R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}, R_m = \frac{2m}{M_\Sigma}, R_a = \frac{a}{l}, h = \frac{H_1}{\omega_0 ml^2}, H = \frac{H_2}{M_\Sigma \omega_0}. \quad (13)$$

Введем безразмерные переменные и время

$$\xi = \frac{x}{l}, \eta = \frac{y}{l}, \tau = \omega_0 \frac{d}{d\tau}. \quad (14)$$

С учетом (14)

$$\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}. \quad (15)$$

Введем параметры, характеризующие дисбаланс в системе

$$u_0 = \frac{M \cos \gamma}{2ml}, \quad v_0 = -\frac{M \sin \gamma}{2ml}. \quad (16)$$

Поделим первые два уравнения в (9), (10) на $M_\Sigma l \omega_0^2$, вторые два уравнения в (9) и третье уравнение в (10) на $ml^2 \omega_0^2$. Учитывая (12-16), получим уравнения динамики в безразмерном виде:

- для случая двух пар маятников:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi - R_m [\ddot{\psi} \cos \psi + 2R_\omega \dot{\phi} \cos \phi - \dot{\psi}^2 \sin \psi - \\ - R_\omega^2 (\sin \psi - u_0)] + H(\dot{\xi} - R_\omega \eta) + \xi = 0, \\ \ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta + R_m [\ddot{\phi} \cos \phi - 2R_\omega \dot{\psi} \cos \psi - \dot{\phi}^2 \sin \phi - \\ - R_\omega^2 (\sin \phi - v_0)] + H(\dot{\eta} + R_\omega \xi) + \eta = 0, \\ \ddot{\phi} + h\dot{\phi} + R_a R_\omega^2 \sin \phi + (\ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta) \cos \phi = 0, \\ \ddot{\psi} + h\dot{\psi} + R_a R_\omega^2 \sin \psi - (\ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi) \cos \psi = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

- для случая одной пары маятников:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi - R_m [\ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \sin \psi - R_\omega^2 (\sin \psi - u_0)] + H(\dot{\xi} - R_\omega \eta) + \xi = 0, \\ \ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta + R_m [-2R_\omega \dot{\psi} \cos \psi + R_\omega^2 v_0] + H(\dot{\eta} + R_\omega \xi) + \eta = 0, \\ \ddot{\psi} + h\dot{\psi} + R_a R_\omega^2 \sin \psi - (\ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi) \cos \psi = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

причем в (17), (18) точка над переменной означает уже производную по τ , а не по t .

Из (17), (18) видно, что динамику как двухмаятникового, так и четырехмаятникового АБУ характеризуют семь существенно различных параметра

$$R_\omega, v_0, u_0 \in R^1; \quad R_a, h, H \geq 0; \quad 0 < R_m^{об.м.(ч.м.)} < 1 \quad (1/2) \quad (19)$$

При введении за место R_a нового независимого параметра R_g , такого, что

$$R_g^2 = R_a R_\omega^2, \quad (20)$$

полученные дифференциальные уравнения движения (17) полностью совпадают с дифференциальными уравнениями движения ротора, уравновешиваемого двумя парами связанных маятников, насаженных на оси, перпендикулярные валу [4]. Это позволяет по одним обобщённым дифференциальным уравнениям изучать динамику двух принципиально разных автобалансиров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусаров А.А., Сусанин В.И., Шаталов Л.Н., Грушин Б.М. Автоматическая балансировка роторов машин. -М.: Наука, 1997. -151 с.
2. Филимонихин Г.Б. Автобалансирующее устройство / А.с. СССР на изобретение № 1795319 по кл. G 01 M 1/38, 15.02.93, Бюл. № 6
3. Філімоніхін Г.Б., Чайковський О.Б., Бурлака Г.В. Ефективність зрівноваження ротора чотирьохмаятниковим автобалансиром з в'язями // Зб. "Проблеми розробки, виробництва та експлуатації сільськогосподарської техніки", Кіровоград: КІСМ, -1995. -С.113-117
4. Филимонихин Г.Б. Плоская модель ротора, уравновешиваемого двумя парами связанных маятников, насаженных на оси, перпендикулярные валу // Збірник наукових праць КДТУ "Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація", -1999. Вип.№5, С.52-55.

**Филимонихин Г.Б., Чайковский А.Б., Майоров В.М. Плоская модель ротора, уравновешиваемого маятниковым автобалансиром со связями // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник «Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин», 2000. Вип.№29, С.109-117.*