УДК 631.362.36:62-755

Г.Б.Филимонихин, Ю.А.Невдаха

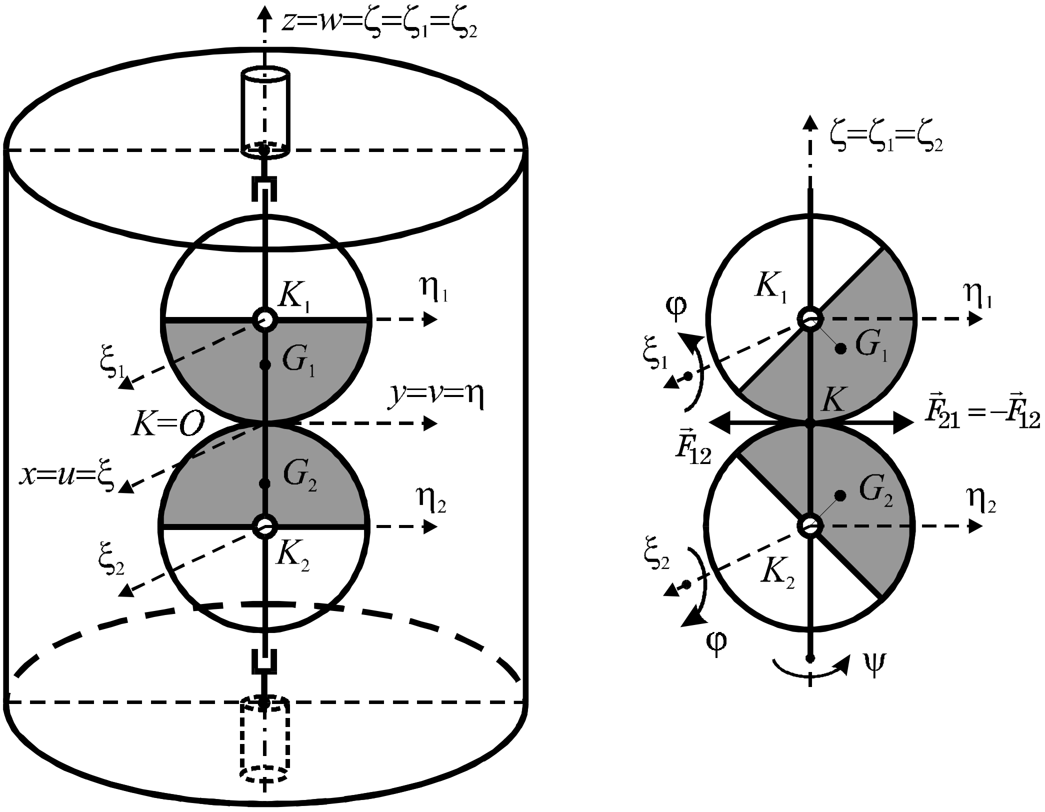
МОДЕЛЬ РОТОРА, УРАВНОВЕШИВАЕМОГО АВТОБАЛАНСИРОМ С ДВУМЯ СВЯЗАННЫМИ КОРРЕКТИРУЮЩИМИ ГРУЗАМИ С НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ НА ОСИ ВАЛА РОТОРА*

Для уравновешивания скоростных роторов центробежных машин, шпинделей шлифовальных станков, роторов турбогенераторов и т.д. применяются пассивные автобалансиры. Корректирующие грузы (КГ) в них с течением времени сами приходят в то положение, в котором уравновешивают ротор и дальше вращаются с ним как одно жесткое целое, пока не начнет меняться дисбаланс, скорость вращения ротора или не появятся возмущающие силы, действующие на ротор.

В [1] установлено, что два связанных под прямым углом маятника, насаженных на ось, перпендикулярную валу ротора, уравновешивают дисбаланс в плоскости, перпендикулярной валу и проходящей через точку подвеса. В [2] установлено, что автобалансирующее свойство проявляет любой КГ с неподвижной точкой на оси вала ротора при выполнении следующих условий относительно главных осей x_1, x_2, x_3, выходящих из точки подвеса КГ:

$$I_1 = A_1, \quad I_2 = I_3 = B, \quad \mathbf{l}_G = (0,0,-l)^{\text{т}}, \tag{1}$$

где: I_1, I_2, I_3 - осевые моменты инерции КГ; $\mathbf{l}_G$ - радиус-вектор центра масс КГ относительно точки подвеса; т – знак транспонирования. Идеальному уравновешиванию ротора препятствуют силы тяжести. Поэтому в [3] предложено устанавливать на оси вала ротора два идентичных КГ и связывать их так, чтобы они поворачивались вокруг вторых осей вращения на равные углы в противоположные стороны (рис.). Ниже строится модель ротора и автобалансира с двумя связанными КГ с неподвижными точками на оси вала ротора.



а б

Рисунок

Предполагается, что КГ могут поворачиваться вместе на угол ψ вокруг оси вала ротора и на равные углы φ в противоположные стороны вокруг осей, проходящих через их точки подвеса и перпендикулярных оси вала (рис.). При поворотах КГ вокруг осей вращения возникают моменты сопротивления $-H_1\dot{\varphi}$, $-2H_2\dot{\psi}$, где H_1, H_2 - коэффициенты вязкого трения. Ротор расположен вертикально и его удерживают изотропные вязкоупругие опоры. Для описания движения ротора используем подвижные оси *Oxyz*, которые вращаются вместе с ротором с постоянной угловой скоростью ω, причем ось *z* совпадает с осью вращения и точка *O* находится на уровне общего центра масс КГ. Введем вспомогательные оси *Kuvw*, жестко связанные с ротором и параллельные осям *Oxyz*, причем ось *w* совпадает с осью вала ротора, и при отсутствии отклонения вала от оси вращения точки *K* и *O* совпадают. Относительно вспомогательных осей центр масс ротора имеет координаты $(e\cos\gamma, e\cos\gamma, 0)$, где: e - эксцентриситет; γ - угол, определяющий направление вектора дисбаланса.

В процессе движения вал отклоняется от оси вращения на $\mathbf{r}_K = \mathbf{OK}$ и на него начинают действовать восстанавливающая сила $-c\mathbf{r}_K$ и сила вязкого сопротивления $-H_3\mathbf{v}_K$, где c - жесткость, H_3 - коэффициент вязкого сопротивления опор, $\mathbf{v}_K = d\mathbf{r}_K / dt$ - абсолютная скорость оси вала ротора (точки K). Для описания движения КГ используем вспомогательные оси $K_i u_i v_i w_i$ (на рис. не показаны), которые выходят из точки подвеса i-го КГ и параллельны осям $Kuvw$, и оси $K_i\xi_i\eta_i\zeta_i$, которые выходят из точки подвеса i-го КГ и получаются из осей $K_i u_i v_i w_i$ после поворота на угол ψ вокруг оси w_i.

Для составления уравнений динамики КГ используем теорему об изменении момента количества движения материальной системы. За подвижные оси принимаем $K_i\xi_i\eta_i\zeta_i$. Тогда теорема примет вид [4]:

$$\frac{d'\mathbf{L}_{K_i}}{dt} + \vec{\omega}_{\xi_i\eta_i\zeta_i} \times \mathbf{L}_{K_i} + \mathbf{l}_{G_i} \times m\mathbf{a}_{K_i} = \mathbf{M}_{K_i}^{(e)}, \quad \mathbf{L}_{K_i} = \vec{\omega}_i \widetilde{\mathbf{I}}, \qquad / i = 1,2 /, \tag{2}$$

где $\mathbf{L}_{K_i}$ - момент количества движения i-го КГ относительно точки подвеса, $d'\mathbf{L}_{K_i} / dt$ - его производная в подвижной системе координат $K_i\xi_i\eta_i\zeta_i$; $\vec{\omega}_i$ - абсолютная скорость вращения i-го КГ; $\vec{\omega}_{\xi_i\eta_i\zeta_i}$ - угловая скорость вращения подвижных осей $K_i\xi_i\eta_i\zeta_i$; $\mathbf{M}_{K_i}^{(e)}$ - главный момент внешних сил, действующих на i-й КГ, найденный относительно точки K_i; $\mathbf{l}_{G_i}$ – радиус-вектор центра масс i-го КГ относительно точки K_i; $\mathbf{a}_{K_i}$ - абсолютное ускорение точки подвеса i-го КГ; m - масса i-го КГ, $\widetilde{\mathbf{I}}$ - его тензор инерции относительно точки K_i. В проекциях на оси $K_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ (рис., б):

$$\widetilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega}_{\xi_i\eta_i\zeta_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega + \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega}_{1,2} = \begin{bmatrix} \pm\dot{\varphi} \\ 0 \\ \omega + \dot{\psi} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{K_{1,2}} = \begin{bmatrix} \pm A\dot{\varphi} \\ 0 \\ B(\omega + \dot{\psi}) \end{bmatrix}, \quad \frac{d'\mathbf{L}_{K_{1,2}}}{dt} = \begin{bmatrix} \pm A\ddot{\varphi} \\ 0 \\ B\ddot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_{G_{1,2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ l\sin\varphi \\ \mp l\cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Ускорения точек подвеса КГ в проекциях на оси $K_i\xi_i\eta_i\zeta_i$:

$$\mathbf{a}_{K_i} = \mathbf{A}_\psi \mathbf{a}_K^{(xyz)} = \begin{bmatrix} (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos\psi + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\sin\psi \\ -(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\sin\psi + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\cos\psi \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_K^{(xyz)} = \begin{bmatrix} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где: $\mathbf{A}_\psi$ - матрица преобразования координат *x, y, z* в ξ, η, ζ; $\mathbf{a}_K^{(xyz)}$ - ускорение точки подвеса КГ в проекциях на оси $K\xi\eta\zeta$. Из внешних активных сил моменты образуют силы вязкого трения и силы тяжести:

$$\mathbf{M}_{K_{1,2}}^{(con)} = \begin{bmatrix} \mp H_1\dot{\varphi} \\ 0 \\ -H_2^{(1,2)}\dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{K_{1,2}}(-mg\mathbf{k}) = -\mathbf{l}_{G_{1,2}} \times \mathbf{k}mg = \begin{bmatrix} \mp mgl\sin\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где: $\mathbf{M}_{K_{1,2}}^{(con)}$ - моменты сил вязкого трения; $\mathbf{M}_{K_{1,2}}(-mg\mathbf{k})$ - момент сил тяжести КГ; $\mathbf{k}$ - единичный вектор, направленный вертикально вверх; $H_2^{(1,2)}$ - коэффициенты трения, такие, что $H_2^{(1)} + H_2^{(2)} = 2H_2$. В проекциях на оси $K_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ внешние реакции связей образуют моменты:

$$M_{K_{1,2}\xi}(\mathbf{R}_{12,21}) = -RF_{12,21}, \quad M_{K_{1/2}\zeta}(\mathbf{R}_{12,21}) = 0, \quad R = |KK_{1,2}|, \tag{6}$$

где $\mathbf{R}_{12}$ - внутренняя реакция связи – сила действия на тело 1 тела 2; $\mathbf{R}_{21}$ - сила действия на тело 2 тела 1; $\mathbf{F}_{12,21}$ - составляющие реакции $\mathbf{R}_{12,21}$, направленные параллельно оси η. Подставляя (3-6) в (2) и преобразовывая, получим следующие уравнения динамики КГ:

$$A\ddot{\varphi} + H_1\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi - ml[(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\sin\psi - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\cos\psi]\cos\varphi = -RF_{12},$$
$$-A\ddot{\varphi} - H_1\dot{\varphi} - mgl\sin\varphi + ml[(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\sin\psi - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\cos\psi]\cos\varphi = -RF_{12},$$
$$B\ddot{\psi} + H_2^{(1)}\dot{\psi} - ml[(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos\psi + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\sin\psi]\sin\varphi = 0,$$
$$B\ddot{\psi} + H_2^{(2)}\dot{\psi} - ml[(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos\psi + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\sin\psi]\sin\varphi = 0.$$

Отнимая от первого уравнения второе, исключим неизвестную реакцию F_{12}. Добавляя к третьему уравнению четвёртое, заменяем неизвестные коэффициенты

$H_2^{(1)}, H_2^{(2)}$ на $2H_2$. Окончательно получаем следующие уравнения динамики КГ:

$$A\ddot{\varphi} + H_1\dot{\varphi} - ml[(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\sin\psi - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\cos\psi]\cos\varphi = 0,$$

$$B\ddot{\psi} + H_2\dot{\psi} - ml[(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos\psi + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\sin\psi]\sin\varphi = 0. \qquad (7)$$

Для получения уравнений динамики ротора относительно подвижных осей $Oxyz$ используем теорему о движении центра масс материальной системы в виде

$$M_\Sigma\left[\frac{d'^2\mathbf{r}_C}{dt^2} + \vec{\varepsilon}_{xyz}\times\mathbf{r}_C + \vec{\omega}_{xyz}\times(\vec{\omega}_{xyz}\times\mathbf{r}_C) + 2\vec{\omega}_{xyz}\times\frac{d'\mathbf{r}_C}{dt}\right] = \mathbf{R}^{(e)}, \qquad (8)$$

где $M_\Sigma = M + 2m$ - масса системы; $\mathbf{r}_C$ - радиус-вектор центра масс системы, $d'\mathbf{r}_C/dt$, $d'^2\mathbf{r}_C/dt^2$ - его первая и вторая производные относительно осей $Oxyz$; $\vec{\omega}_{xyz}$, $\vec{\varepsilon}_{xyz}$ - угловые скорость и ускорение вращения осей $Oxyz$; $\mathbf{R}^{(e)}$ - главный вектор внешних сил, действующих на систему. В проекциях на оси $Oxyz$:

$$M_\Sigma\mathbf{r}_C = \begin{bmatrix} M(x + e\cos\gamma) + 2m(x - l\sin\varphi\sin\psi) \\ M(y + e\sin\gamma) + 2m(y + l\sin\varphi\cos\psi) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\omega}_{xyz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}_{xyz} = 0, \quad \mathbf{R}^{(e)} = -c\mathbf{r}_K - H_3\mathbf{v}_K, \quad \mathbf{r}_K = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_K = \frac{d'\mathbf{r}_K}{dt} + \vec{\omega}_{xyz}\times\mathbf{r}_K = \begin{bmatrix} \dot{x} - \omega y \\ \dot{y} + \omega x \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и преобразовывая, получим следующие уравнения динамики ротора:

$$M_\Sigma(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) + H_3(\dot{x} - \omega y) + cx - 2ml\Big[\big[\ddot{\varphi}\sin\psi + 2\dot{\varphi}(\omega + \dot{\psi})\cos\psi\big]\cos\varphi +$$
$$+\big[\ddot{\psi}\cos\psi - (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\omega\dot{\psi})\sin\psi\big]\sin\varphi - \left(\sin\varphi\sin\psi - \frac{Me}{2ml}\cos\gamma\right)\omega^2\Big] = 0,$$

$$M_\Sigma(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) + H_3(\dot{y} + \omega x) + cy + 2ml\Big[\big[\ddot{\varphi}\cos\psi - 2\dot{\varphi}(\omega + \dot{\psi})\sin\psi\big]\cos\varphi -$$
$$-\big[\ddot{\psi}\sin\psi + (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\omega\dot{\psi})\cos\psi\big]\sin\varphi - \left(\sin\varphi\cos\psi + \frac{Me}{2ml}\sin\gamma\right)\omega^2\Big] = 0. \qquad (10)$$

Таким образом, динамика системы зависит от двенадцати параметров

$$A, B, l, m, H_1, H_2, M, e, \gamma, c, H_3, \omega .$$

Приводим уравнения динамики к безразмерному виду. Вводим параметры:

$$\omega_0 = \sqrt{c/M_\Sigma}, \ \rho_1 = \sqrt{A/m}, \ \rho_2 = \sqrt{B/m}, \tag{11}$$

где ω_0 - резонансная частота – частота собственных колебаний ротора при неподвижном относительно ротора КГ, отсутствии вращения ротора и не учёте сил сопротивления; $\rho_{1/2}$ - осевые радиусы инерции КГ. Вводим безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{xl}{\rho_1^2}, \ \eta = \frac{yl}{\rho_1^2}, \ \tau = \omega_0 t, \ \left(\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}\right). \tag{12}$$

Вводим безразмерные параметры:

$$R_m = \frac{2ml^2}{M_\Sigma \rho_1^2}, \ R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \ R_\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \ h_{1,2} = \frac{H_{1,2}}{m\rho_{1,2}^2 \omega_0},$$

$$H = \frac{H_3}{M_\Sigma \omega_0}, \ u_0 = \frac{Me}{2ml}\cos\gamma, \ v_0 = \frac{Me}{2ml}\sin\gamma. \tag{13}$$

После преобразований уравнения динамики (7), (10) примут следующий безразмерный вид:

$$\ddot\varphi + h_1\dot\varphi - [(\ddot\xi - 2R_\omega\dot\eta - R_\omega^2\xi)\sin\psi - (\ddot\eta + 2R_\omega\dot\xi - R_\omega^2\eta)\cos\psi]\cos\varphi = 0,$$

$$(\ddot\psi + h_2\dot\psi)R_\rho^2 - [(\ddot\xi - 2R_\omega\dot\eta - R_\omega^2\xi)\cos\psi + (\ddot\eta + 2R_\omega\dot\xi - R_\omega^2\eta)\sin\psi]\sin\varphi = 0,$$

$$\ddot\xi - 2R_\omega\dot\eta - R_\omega^2\xi + H(\dot\xi - R_\omega\eta) + \xi - R_m\Big[[\ddot\varphi\sin\psi + 2(R_\omega + \dot\psi)\dot\varphi\cos\psi]\cos\varphi +$$
$$+ \left[\ddot\psi\cos\psi - (\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + 2R_\omega\dot\psi)\sin\psi\right]\sin\varphi + R_\omega^2(u_0 - \sin\varphi\sin\psi)\Big] = 0,$$

$$\ddot\eta + 2R_\omega\dot\xi - R_\omega^2\eta + H(\dot\eta + R_\omega\xi) + \eta - R_m\Big[\left[\ddot\psi\sin\psi + (\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + 2R_\omega\dot\psi)\cos\psi\right]\sin\varphi -$$
$$- \left[\ddot\varphi\cos\psi - 2(R_\omega + \dot\psi)\dot\varphi\sin\psi\right]\cos\varphi + R_\omega^2(v_0 + \sin\varphi\cos\psi)\Big] = 0, \tag{14}$$

где точка над переменной означает уже производную по τ, а не по t. Таким образом, динамику системы определяют восемь безразмерных параметров, определённых в (13).

Построенная модель, описывающая плоскопараллельные движения ротора и движения автобалансира, состоящего из двух связанных КГ с неподвижными точками на оси вала ротора, позволяет сделать следующие выводы:

1) в рамках построенной модели динамику системы описывает система четырех обыкновенных автономных дифференциальных уравнений второго порядка;

2) в размерных параметрах динамику системы определяют двенадцать параметров, а в безразмерных – восемь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филимонихин Г.Б. Уравновешивание ротора корректирующим грузом с неподвижной точкой на оси вала // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник “Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин”, 2000. Вип.№29, С.103-108.

2. Филимонихин Г.Б. Об уравновешивании ротора маятниками, насаженными на оси, перпендикулярные валу // Доп. НАН України. - 2000. - №6. - С. 74-78.

3. Філімоніхін Г.Б., Невдаха Ю.А. Зменшення чутливості автобалансирів до сил ваги шляхом накладання в’язей // Збірник наукових праць КДТУ, -2000. Вип.№6, С.76-77.

4. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 168 с.

**Филимонихин Г.Б., Невдаха Ю.А.* Модель ротора, совершающего плоскопараллельные движения, и двух связанных АТТ // Збірник наукових праць КДТУ, 2001. Вип.№8, С.194-201.