

УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ РОТОРА, СОВЕРШАЮЩЕГО  
ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ, И АВТОБАЛАНСИРА-ДЕМПФЕРА \*

Г.Б. Филимонихин, В.С. Сотников

Для балансировки роторов центробежных машин применяются пассивные автобалансиры. Корректирующие грузы (КГ) в них сами приходят в то положение, в котором уравнивают ротор и дальше вращаются с ним как одно жесткое целое, пока не начнет меняться дисбаланс, угловая скорость вращения ротора или не начнут действовать на ротор возмущающие силы. Классические автобалансиры - кольцевые, маятниковые, шаровые, имеют недостатки, состоящие в: действии на ротор со значительными силами даже при отсутствии дисбаланса; внесении дополнительного дисбаланса к ротору во время его пуска и выбега. В [1] установлено, что КГ с неподвижной точкой на оси вала ротора уравнивает ротор в плоскости, перпендикулярной валу и проходящей через точку подвеса при выполнении следующих условий относительно главных осей  $x_1, x_2, x_3$ , выходящих из точки подвеса КГ:

$$I_1=A, \quad I_2=I_3=B, \quad \mathbf{I}_G=(0,0,-l)^T, \quad (1)$$

где  $I_1, I_2, I_3$  - осевые моменты инерции КГ;  $\mathbf{I}_G$  - радиус-вектор центра масс КГ относительно точки подвеса;  $T$  - знак транспонирования. Это предложено использовать в автобалансирах-демпферах [2]. Такие автобалансиры устраняют названные выше недостатки классических автобалансиров, и кроме того, демпфируют малые вибрации ротора. Поэтому задача их исследования актуальна.

В настоящей работе исследуются установившиеся движения ротора, уравниваемого автобалансиrom-демпфером, у которого КГ имеет сферический тензор инерции относительно точки подвеса:

$$I_1=I_2=I_3=A. \quad (2)$$

При построении модели ротора и автобалансира предполагаем, что ротор расположен вертикально, движется плоскопараллельно, причем плоскость движения - горизонтальна (рис. 1). Его удерживают изотропные вязкоупругие опоры. Для

описания движения ротора используем оси  $Oxyz$ , которые вращаются вместе с ротором с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , причем ось  $z$  совпадает с осью вращения, и точка  $O$  находится на уровне точки подвеса КГ. Вспомогательные оси  $Kuvw$  жестко связаны с ротором и параллельны осям  $Oxyz$ , причем ось  $w$  совпадает с осью вала ротора, и при отсутствии отклонения вала от оси вращения точки  $K$  и  $O$  совпадают. Относительно осей  $Kuvw$  центр масс ротора имеет координаты  $(e \cos \gamma, e \sin \gamma, 0)$ , где  $e$  – эксцентриситет,  $\gamma$  – угол, определяющий направление вектора дисбаланса.

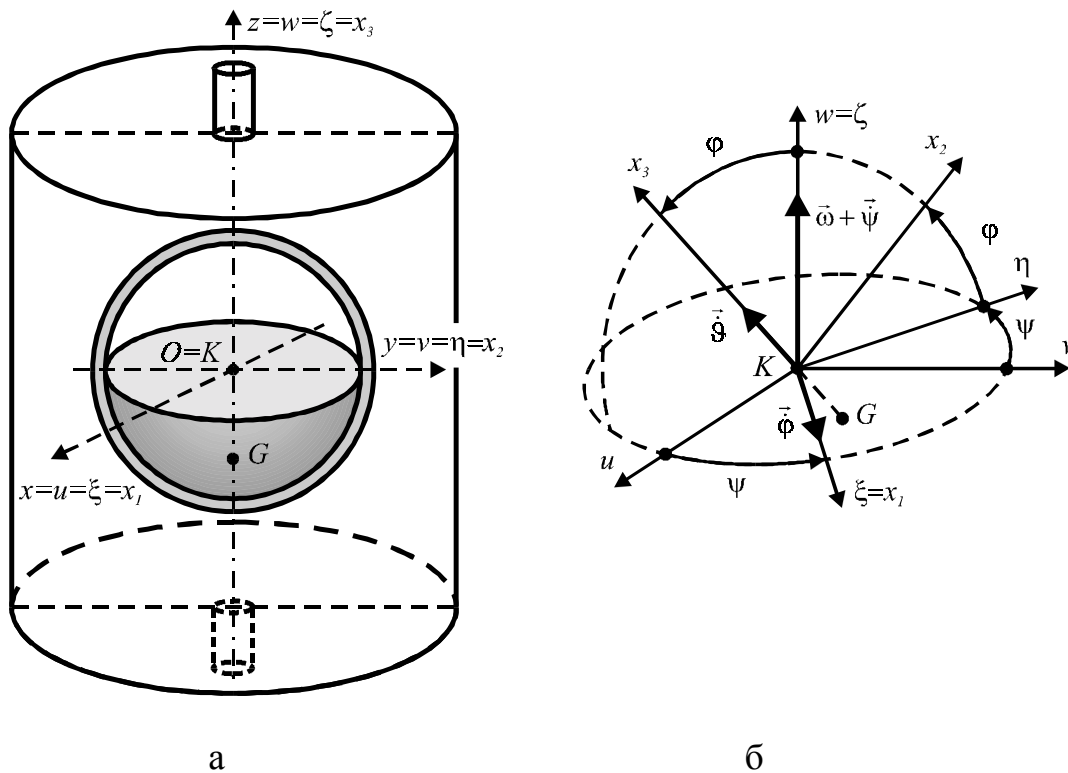


Рисунок 1

В процессе движения вал отклоняется от оси вращения на  $\mathbf{r}_K = \mathbf{OK}$  и на него начинают действовать восстанавливающая сила  $-c\mathbf{r}_K$  и сила вязкого сопротивления  $-H_c \mathbf{v}_K$ , где  $c$  – жесткость,  $H_c$  – коэффициент вязкого сопротивления опор,  $\mathbf{v}_K = d\mathbf{r}_K/dt$  – абсолютная скорость оси вала ротора (точки  $K$ ). Положение КГ относительно ротора будем определять тремя углами Эйлера. При первом повороте на угол  $\psi$  вокруг оси  $w$  оси  $Kuvw$  переходят в оси  $K\xi\eta\zeta$ , причем  $\zeta=w$ . При втором повороте на угол  $\phi$  вокруг оси  $\xi$ , оси  $K\xi\eta\zeta$  переходят в главные оси  $Kx_1x_2x_3$ , причем  $\xi=x_1$ . Последний поворот КГ происходит на угол  $\theta$  вокруг оси  $x_3$ .

Уравнения установившихся движений системы в безразмерном виде имеют вид

$$\begin{aligned} (\tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi}) R_{\omega}^2 \cos \tilde{\varphi} + R_g^2 \sin \tilde{\varphi} &= 0, & (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) R_{\omega}^2 &= 0, \\ (R_{\omega}^2 - 1) \tilde{\xi} + H R_{\omega} \tilde{\eta} + R_m R_{\omega}^2 (u_0 - \sin \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi}), & & & \\ - H R_{\omega} \tilde{\xi} + (R_{\omega}^2 - 1) \tilde{\eta} + R_m R_{\omega}^2 (v_0 + \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi}), & & & \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}$  - установившиеся значения переменных, определяющих положение системы;

$$\xi = xl/\rho^2, \quad \eta = yl/\rho^2, \quad (4)$$

- безразмерные переменные ( $x, y$  - координаты точки  $K$ , определяющей положение вала ротора);

$$\begin{aligned} R_m = \frac{ml^2}{M_{\Sigma} \rho^2}, \quad R_{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad R_g^2 = \frac{gl}{\rho^2 \omega_0^2}, \\ H = \frac{H_c}{M_{\Sigma} \omega_0}, \quad u_0 = e_0 \cos \gamma, \quad v_0 = e_0 \sin \gamma, \quad \left( e_0 = \frac{Me}{ml} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

- безразмерные параметры, причем

$$\omega_0 = \sqrt{c/M_{\Sigma}}, \quad \rho = \sqrt{A/m}, \quad (6)$$

где  $\omega_0$  - резонансная частота – частота собственных колебаний ротора при неподвижном относительно ротора КГ, отсутствии вращения ротора и не учёте сил сопротивления;  $\rho$  - осевой радиус инерции КГ.

Второе уравнение в (3) будет выполняться, если

$$\cos \tilde{\psi} = \pm \tilde{\eta}/\tilde{r}, \quad \sin \tilde{\psi} = \mp \tilde{\xi}/\tilde{r}, \quad \tilde{r} = \sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2}. \quad (7)$$

Из этого следует, что вторая ось вращения КГ перпендикулярна вектору отклонения вала от оси вращения и КГ отклонен в направлении отклонения вала от оси вращения или в противоположную сторону. Решая первые два уравнения в (3) относительно  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ , находим

$$\tilde{\xi} = -\frac{R_g^2}{R_{\omega}^2} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi}, \quad \tilde{\eta} = \frac{R_g^2}{R_{\omega}^2} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi}. \quad (8)$$

Тогда после преобразований последние два уравнения в (3) приводятся к виду

$$\begin{aligned}
& -\frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} (u_0 \sin \tilde{\psi} - v_0 \cos \tilde{\psi} - \sin \tilde{\varphi}) + (R_\omega^2 - 1) \operatorname{tg} \tilde{\varphi} = 0, \\
& -\frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} (u_0 \cos \tilde{\psi} + v_0 \sin \tilde{\psi}) - HR_\omega \operatorname{tg} \tilde{\varphi} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Введем в рассмотрение угол между вектором дисбаланса и второй осью вращения

$$\delta = \psi - \gamma. \tag{10}$$

Тогда, с учетом (5), уравнения (9) приводятся к виду

$$-\frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} (e_0 \sin \delta - \sin \tilde{\varphi}) + (R_\omega^2 - 1) \operatorname{tg} \tilde{\varphi} = 0, \quad -\frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} e_0 \cos \delta - HR_\omega \operatorname{tg} \tilde{\varphi} = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$\sin \delta = \frac{(R_\omega^2 - 1) R_g^2}{R_m R_\omega^4 e_0} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\sin \varphi}{e_0}, \quad \cos \delta = -\frac{HR_g^2}{R_m R_\omega^3 e_0} \operatorname{tg} \varphi. \tag{11}$$

Исследуем установившиеся движения при отсутствии сил сопротивления

$$H=0. \tag{12}$$

Из второго уравнения в (11) находим

$$\cos \delta = 0, \quad \sin \delta = \pm 1, \quad \delta = \pm \pi/2. \tag{13}$$

Из этого следует, что вторая ось вращения КГ перпендикулярна вектору дисбаланса.

При этом вектор отклонения оси вала лежит на одной линии с вектором дисбаланса.

С учетом (13) первое уравнение в (11) будет эквивалентно двум таким уравнениям

$$1 = \frac{(R_\omega^2 - 1) R_g^2}{R_m R_\omega^4 e_0} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\sin \varphi}{e_0}, \quad -1 = \frac{(R_\omega^2 - 1) R_g^2}{R_m R_\omega^4 e_0} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\sin \varphi}{e_0}. \tag{14}$$

Заменой угла  $\varphi$  на  $-\varphi$  первое уравнение приводится к виду второго. С другой стороны, первое уравнение отличается от второго тем, что в его решениях вторая ось вращения КГ повернута на  $180^\circ$ . Поэтому КГ в обоих случаях отклоняются в одну и ту же сторону по отношению к ротору. Значит, решения двух уравнений (14) дают одни и те же установившиеся движения. Поэтому, не ограничивая общности,

будем исследовать корни первого уравнения в (14). Представим это уравнение в виде

$$\sin \tilde{\varphi} - e_0 = a \operatorname{tg} \tilde{\varphi}, \quad a = \frac{(1 - R_\omega^2) R_g^2}{R_m R_\omega^4}, \quad -\frac{R_g^2}{4R_m} \leq a < +\infty. \quad (15)$$

Заметим, что параметр  $a$  принимает наименьшее значение при  $R_\omega = \sqrt{2}$ . Полагая, что емкости КГ хватает для уравнивания ротора, введем в рассмотрение угол

$$\varphi_0 = \arcsin e_0. \quad (16)$$

На рис. 2, а показан график функции  $\sin \tilde{\varphi} - e_0$  - толстая линия, и графики функции  $a \operatorname{tg} \tilde{\varphi}$  при  $R_\omega \rightarrow +0$  - тонкая сплошная линия, и при  $R_\omega \rightarrow 1-0$  - тонкий пунктир. Из рисунка видно, что при  $R_\omega \rightarrow +0$  ( $a \rightarrow +\infty$ ) у системы только два существенно различных установившихся движения:

- 1)  $\tilde{\varphi}_{11} \sim -0$ , центр масс КГ начинает отклоняться в тяжелую сторону ротора и находится под точкой подвеса;
- 2)  $\tilde{\varphi}_{12} \sim \pi - 0$ , центр масс КГ начинает отклоняться в лёгкую сторону ротора и находится над точкой подвеса.

С увеличением  $R_\omega$  параметр  $a$  уменьшается, и у системы появляются ещё два установившихся движения. Из рис. 2, а видно, что при  $R_\omega \rightarrow 1-0$  ( $a \rightarrow +0$ ) у системы четыре существенно различных установившихся движения:

- 1)  $\tilde{\varphi}_{11} \sim -\pi/2 + 0$ , центр масс КГ отклонён в тяжелую сторону ротора и находится ниже точки подвеса;
- 2)  $\tilde{\varphi}_{12} \sim \pi - \varphi_0 + 0$ , КГ уравнивает ротор и его центр масс находится выше точки подвеса;
- 3)  $\tilde{\varphi}_{13} \sim \varphi_0 + 0$ , КГ уравнивает ротор и его центр масс находится ниже точки подвеса;
- 4)  $\tilde{\varphi}_{14} \sim \pi/2 - 0$ , центр масс КГ отклонён в лёгкую сторону ротора и находится ниже точки подвеса.

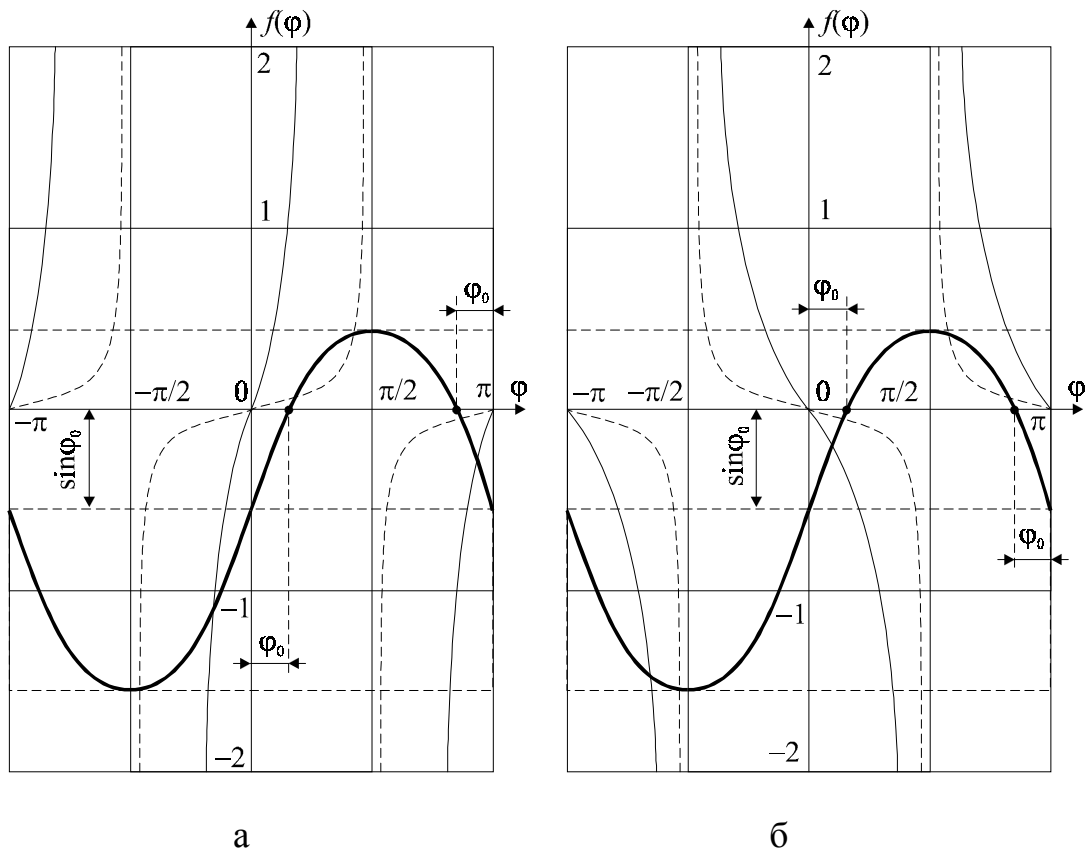


Рисунок 2

На рис. 2, б показан график функции  $\sin \tilde{\varphi} - e_0$  - толстая линия, и графики функции  $a \operatorname{tg} \tilde{\varphi}$  при  $R_\omega \rightarrow 1+0$ ,  $R_\omega \rightarrow +\infty$  - тонкий пунктир, и при  $R_\omega \sim \sqrt{2}$  - тонкая сплошная линия. В случаях  $R_\omega \rightarrow 1+0$ ,  $R_\omega \rightarrow +\infty$  параметр  $a \rightarrow -0$  и у системы четыре существенно различных установившихся движения:

- 1)  $\tilde{\varphi}_{11} \sim -\pi/2 - 0$ , центр масс КГ отклонён в тяжёлую сторону ротора и находится выше точки подвеса;
- 2)  $\tilde{\varphi}_{12} \sim \pi - \varphi_0 - 0$ , КГ уравнивает ротор и его центр масс находится выше точки подвеса;
- 3)  $\tilde{\varphi}_{13} \sim \varphi_0 - 0$ , КГ уравнивает ротор и его центр масс находится ниже точки подвеса;
- 4)  $\tilde{\varphi}_{14} \sim \pi/2 + 0$ , центр масс КГ отклонён в лёгкую сторону ротора и находится выше точки подвеса.

При  $R_\omega \sim \sqrt{2}$  параметр  $a$  принимает наименьшее значение  $-R_g^2 / 4R_m$ . Из рис. 2, б видно, что при небольших дисбалансах ( $e_0 \sim 0$ ) у системы на зарезонансных

скоростях всегда четыре существенно различных установившихся движения – аналоги установившихся движений предыдущего случая. При больших дисбалансах ( $e_0 \sim 1-0$ ), когда  $R_\omega \sim \sqrt{2}$  у системы только два существенно различных установившихся движения, которые являются аналогами движений  $\tilde{\varphi}_{11}$ ,  $\tilde{\varphi}_{13}$  предыдущего случая.

Найденные установившиеся движения пронумеруем следующим образом:

$\tilde{\varphi}_1 \sim \varphi_0$  - основное движение, в котором ротор уравновешен и центр масс КГ ниже точки подвеса;

$\tilde{\varphi}_2 \sim \pi - \varphi_0$  - основное движение, в котором ротор уравновешен и центр масс КГ выше точки подвеса;

$\tilde{\varphi}_3 \sim -\pi/2$  - побочное движение, в котором КГ отклонен в тяжелую сторону ротора;

$\tilde{\varphi}_4 \sim \pi/2$  - побочное движение, в котором КГ отклонен в лёгкую сторону ротора.

Найдем скорости вращения ротора, при которых у системы появляются или исчезают установившиеся движения. Из рис. 2 видно, что в критических случаях у кривых  $\sin \tilde{\varphi} - e_0$ ,  $a \operatorname{tg} \tilde{\varphi}$  появляются общие касательные. Это дает условие

$$\cos \tilde{\varphi} = a / \cos \tilde{\varphi}^2. \quad (17)$$

Подставляя в уравнении (15) в  $\operatorname{tg} \tilde{\varphi}$  функцию  $\cos \tilde{\varphi}$  из (17) и преобразовывая, находим следующее уравнение для определения  $\tilde{\varphi}$

$$\sin^3 \tilde{\varphi} = e_0. \quad (18)$$

Существенно различные действительные корни этого уравнения следующие

$$\varphi_{k1} = \arcsin e_0^{1/3}, \quad \varphi_{k2} = \pi - \arcsin e_0^{1/3}. \quad (19)$$

Из уравнения (17) находим следующее уравнение для определения угловых скоростей

$$\pm R_m R_\omega^4 \cos^3 \varphi_{k1} + R_g^2 R_\omega^2 - R_g^2 = 0. \quad (20)$$

Не ограничивая общности, будем искать положительные действительные корни. Ими могут быть только следующие корни

$$R_{\omega 1} = \sqrt{\frac{\sqrt{R_g^4 + 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1}} - R_g^2}{2R_m \cos^3 \varphi_{k1}}}, \quad R_{\omega 2} = \sqrt{\frac{R_g^2 - \sqrt{R_g^4 - 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1}}}{2R_m \cos^3 \varphi_{k1}}},$$

$$R_{\omega 3} = \sqrt{\frac{R_g^2 + \sqrt{R_g^4 - 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1}}}{2R_m \cos^3 \varphi_{k1}}}. \quad (21)$$

Угловые скорости  $R_{\omega 2,3}$  существуют при выполнении условия  $R_g^4 - 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1} > 0$ , или  $R_g^2 > 4R_m \cos^3 \varphi_{k1}$ . Отсюда, с учетом (19), находим

$$R_g^2 > 4R_m [1 - e_0^{2/3}]^{3/2}. \quad (22)$$

Докажем, что при существовании угловых скоростей выполняются неравенства

$$0 < R_{\omega 1} < 1 < R_{\omega 2} < R_{\omega 3}. \quad (23)$$

Для корня  $R_{\omega 1}$  рассмотрим цепочку неравенств

$$R_{\omega 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{R_g^4 + 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1}} - R_g^2}{2R_m \cos^3 \varphi_{k1}} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R_g^4 + 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1}} < R_g^2 + 2R_m \cos^3 \varphi_{k1} \Leftrightarrow$$

$$R_g^4 + 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1} < R_g^4 + 4R_m R_g^2 \cos^3 \varphi_{k1} + 4R_m^2 \cos^6 \varphi_{k1} \Leftrightarrow 4R_m^2 \cos^6 \varphi_{k1} > 0.$$

Аналогично доказываются остальные неравенства. Заметим, что у системы четыре установившихся движения в интервалах угловых скоростей

$$(R_{\omega 1}, R_{\omega 2}) \cup (R_{\omega 3}, +\infty). \quad (24)$$

На рис. 3 показаны предельные положения КГ в различных установившихся движениях. Так как реальные положения КГ могут сильно отличаться от предельных, то установившиеся движения будем различать по тому, аналогом каких предельных положений они являются.



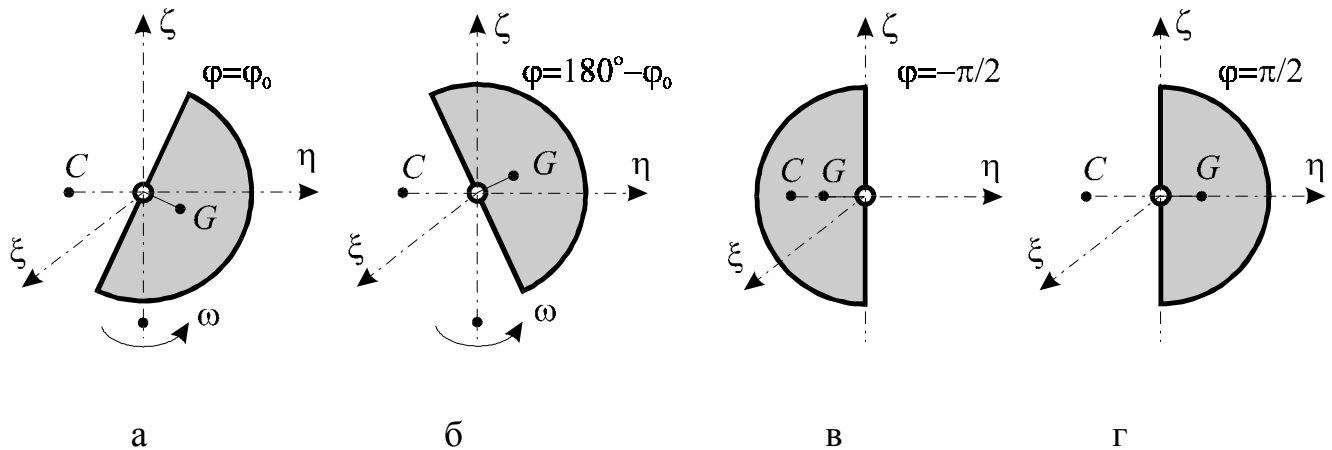


Рисунок 3

На основании проведенных исследований делаем следующие выводы:

- при ограниченных дисбалансах у ротора и автобалансира-демпфера не более четырех существенно различных установившихся движений - два основных и два побочных;

- для работоспособности автобалансира-демпфера необходимо, чтобы на рабочем интервале угловых скоростей вращения ротора устойчивыми были основные установившиеся движения, а побочные - были неустойчивы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Филимонихин Г.Б.* Уравновешивание ротора корректирующим грузом с неподвижной точкой на оси вала // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник “Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин”, 2000. Вип.№29, С.103-108.

2. *Філімоніхін Г.Б., Сотніков В.С.* Автобалансири-демпфери із сферичним рухом корегуючих мас // Збірник наукових праць КДТУ, -2000. Вип.№6, С. 73-75.

\* *Филимонихин Г.Б. Сотников В.С.* Установившиеся движения ротора, совершающего плоскопараллельные движения, и автобалансира-демпфера // Збірник наукових праць КДТУ, 2000. Вип.№7, С.192-199.