

Дослідження стійкості усталених рухів ротора, що рухається
плоскопаралельно і автобалансира-демпфера*

Досліджена стійкість основних і побічних усталених рухів ротора і автобалансира-демпфера. Ротор розташований вертикально і рухається плоскопаралельно. Автобалансира утворений корегуючим вантажем (КВ) з нерухомою точкою на осі ротора. У КВ сферичний тензор інерції відносно цієї точки і центр мас з нею не співпадає. У випадку, коли маса КВ набагато менша маси ротора і вплив сил ваги незначний, встановлено, що на зарезонансних швидкостях обертання ротора єдиний асимптотично стійкий – основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ нижче нерухомої точки на осі ротора.

Для зрівноважування на ходу роторів, що швидко обертаються, застосовуються пасивні автобалансири, такі як маятникові, кільцеві, кульові і т.д. [1]. В них КВ з часом самі приходять в положення, в якому зрівноважують ротор і при незмінному дисбалансі і швидкості обертання ротора рухаються з ним як одне ціле. Недоліком вказаних – “класичних” пристроїв є дія КВ на ротор зі значними силами, навіть при відсутності дисбалансу і внесенні додаткового дисбалансу під час розгону і гальмування ротора. Вказані недоліки усунуті в нових автобалансирах [2], зокрема автобалансирах-демпферах [3], у яких корегуючі вантажі мають певну форму і нерухому точку на осі ротора. Нижче досліджується стійкість усталених рухів ротора і автобалансира-демпфера.

Математичну модель ротора і автобалансира-демпфера (рис. 1), описують наступні диференціальні рівняння руху системи у безрозмірному виді:

$$\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + (\psi\dot{\theta} + R_{\omega}\dot{\theta} + R_g^2)\sin\varphi - \\ - [(\ddot{\xi} - 2R_{\omega}\dot{\eta} - R_{\omega}^2\xi)\sin\psi - (\ddot{\eta} + 2R_{\omega}\dot{\xi} - R_{\omega}^2\eta)\cos\psi] \cos\varphi = 0,$$

$$\begin{aligned}
& (\ddot{\psi} + h\dot{\psi}) \sin\varphi + (\dot{\psi} + R_\omega) \dot{\varphi} \cos\varphi - \dot{\varphi} \dot{\theta} - \\
& - (\ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi) \cos\psi - (\dot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta) \sin\psi = 0, \\
& \ddot{\theta} + h\dot{\theta} + (\ddot{\psi} + h\dot{\psi}) \cos\varphi - (R_\omega + \dot{\psi}) \dot{\varphi} \sin\varphi = 0, \\
& \ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi + H(\dot{\xi} - R_\omega \eta) + \xi - R_m \left[\dot{\varphi} \sin\psi + 2(R_\omega + \dot{\psi}) \dot{\varphi} \cos\psi \right] \cos\varphi + \\
& + \left[\ddot{\psi} \cos\psi - (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R_\omega \dot{\psi}) \sin\psi \right] \sin\varphi + R_\omega^2 (u_0 - \sin\varphi \sin\psi) = 0, \\
& \dot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta + H(\dot{\eta} + R_\omega \xi) + \eta - \\
& - R_m \left[\ddot{\psi} \sin\psi + (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R_\omega \dot{\psi}) \cos\psi \right] \sin\varphi - \\
& - \left[\dot{\varphi} \cos\psi - 2(R_\omega + \dot{\psi}) \dot{\varphi} \sin\psi \right] \cos\varphi + R_\omega^2 (v_0 + \sin\varphi \cos\psi) = 0. \quad (1)
\end{aligned}$$

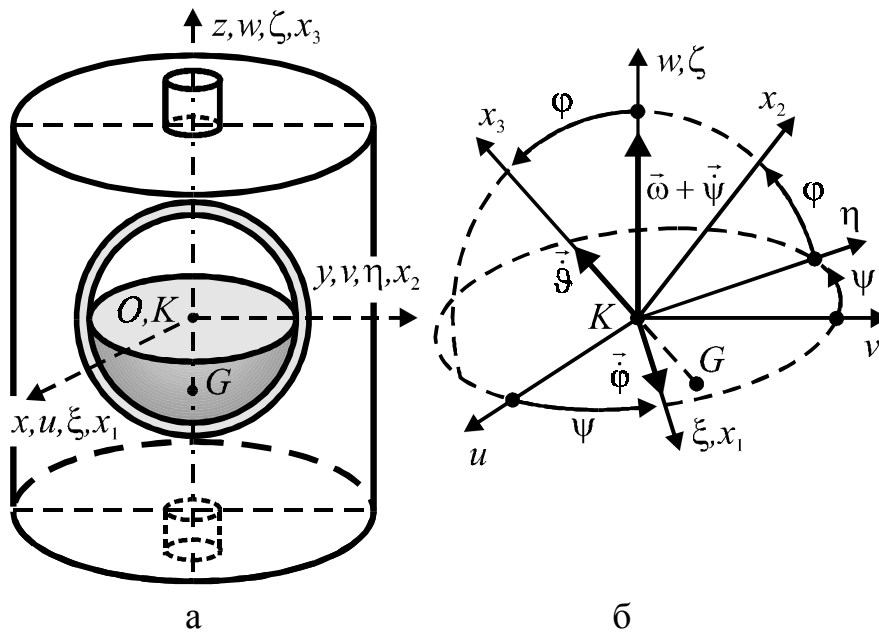
Тут:

$$\xi = \frac{x l}{\rho^2}, \quad \eta = \frac{y l}{\rho^2}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \left(\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \right) \quad (2)$$

- безрозмірні змінні;

$$\begin{aligned}
R_m &= \frac{m l^2}{M_\Sigma \rho^2}, \quad R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad R_g^2 = \frac{g l}{\rho^2 \omega_0^2}, \quad h = \frac{H_1}{m \rho^2 \omega_0}, \\
H &= \frac{H_2}{M_\Sigma \omega_0}, \quad u_0 = e_0 \cos\gamma, \quad v_0 = e_0 \sin\gamma, \quad \left(e_0 = \frac{M e}{m l} \right) \quad (3)
\end{aligned}$$

- безрозмірні параметри. В рівностях (2), (3): x, y – координати, що визначають



положення ротора відносно рухомих осей $Kxyz$; t – час; φ, ψ – кути, що визначають положення КВ відносно ротора; m – маса КВ; l – відстань від центра мас КВ до нерухомої точки на осі ротора; ρ – осьовий радіус інерції

Рис. 1. Модель ротора і автобалансира-демпфера КВ; H_1 – коефіцієнт моменту в'язкого опору, який діє на КВ при його повороті відносно ротора; M –

маса ротора; $M_{\Sigma}=M+m$ – маса системи; e – ексцентриситет, з яким ротор насаджений на вал; γ – кут між віссю x і вектором дисбалансу; H_2 – коефіцієнт в'язкого опору в опорах ротора;

$$\omega_0 = \sqrt{c/M_{\Sigma}} \quad (4)$$

- резонансна частота – частота власних коливань ротора при нерухомому відносно ротора КВ, відсутності обертання і не врахуванні сил опору; c – жорсткість опор.

В роботі [4] показано, що у припущенні, що балансувальної ємності КВ вистачає для зрівноваження ротора -

$$e_0 < 1, \varphi_0 = \arcsin e_0, \quad (5)$$

у системи (1) не більше чотирьох істотно відмінних усталених рухів виду $\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, \tilde{\varphi}_i, \tilde{\psi}_i$ ($\tilde{\varphi}_i$ - довільна стала), $i \leq 4$. Їх запропоновано розрізняти по тому, аналогом яких граничних положень КВ відносно ротора вони є (рис. 2):

$\tilde{\varphi}_1 \sim \varphi_0$ - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ нижче точки підвісу;

$\tilde{\varphi}_2 \sim \pi - \varphi_0$ - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ вище точки підвісу;

$\tilde{\varphi}_3 \sim -\pi / 2$ - побічний рух, у якому КВ відхилено у важкий бік ротора;

$\tilde{\varphi}_4 \sim \pi / 2$ - побічний рух, у якому КВ відхилено у легкий бік ротора.

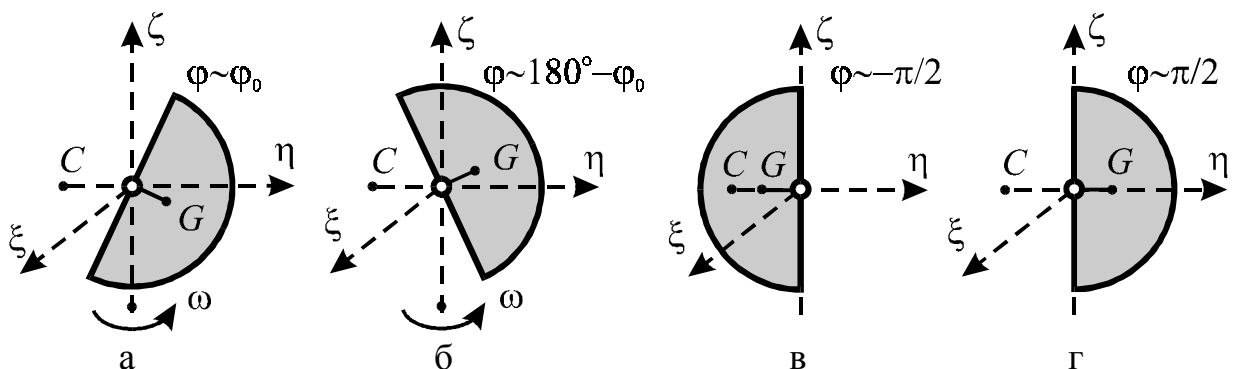


Рис. 2. Граничні положення КВ в усталених рухах

КВ прямує до зазначених вище граничних положень тільки коли $R_{\omega} \gg 1$ - ротор швидко обертається. При наявності сил опору вектор відхилення вала не на одній лінії з вектором дисбалансу і тому КВ відхиляється не строго в напрямку

легкої або важкої сторін ротора. Наявність зовнішніх сил опору приводить до того, що в деякому околі резонансної кутової швидкості не існують побічні рухи.

Істотно, що в 3-му і 4-му побічних рухах: на дорезонансних швидкостях ($|R_\omega| < 1$) $\tilde{\varphi}_3 < \pi / 2$, $\tilde{\varphi}_4 < \pi / 2$ - центр мас КВ нижче нерухомої точки на осі ротора; на зарезонансних швидкостях ($|R_\omega| > 1$) $\tilde{\varphi}_3 > \pi / 2$, $\tilde{\varphi}_4 > \pi / 2$ - центр мас КВ вище цієї точки.

Досліджуємо стійкість усталених рухів щодо змінних $\xi, \eta, \varphi, \psi, p = \dot{\theta}$. В усіх усталених рухах $\tilde{p} = 0$. Введемо збурений рух

$$\begin{aligned} \varphi &= \tilde{\varphi} + \alpha, \quad \psi = \tilde{\psi} + \beta, \\ \xi &= -\frac{R_g^2}{R_\omega^2} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi} + u, \quad \eta = \frac{R_g^2}{R_\omega^2} \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi} + v, \quad p = p, \end{aligned} \quad (6)$$

де α, β, u, v, p - відхилення від незбуреного руху. Тоді рівняння першого наближення матимуть вид:

$$\begin{aligned} l_1 &= \ddot{\alpha} + h\dot{\alpha} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} \alpha + R_\omega p \sin \tilde{\varphi} - \\ &\quad - [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \sin \tilde{\psi} - (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \cos \tilde{\psi}] \cos \tilde{\varphi} = 0, \\ l_2 &= \left(\ddot{\beta} + h\dot{\beta} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} \beta \right) \sin \tilde{\varphi} + R_\omega \dot{\alpha} \cos \tilde{\varphi} - \\ &\quad - (\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \cos \tilde{\psi} - (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \sin \tilde{\psi} = 0, \\ l_3 &= \dot{p} + hp - R_\omega \dot{\alpha} \sin \tilde{\varphi} + (\ddot{\beta} + h\dot{\beta}) \cos \tilde{\varphi} = 0, \\ l_4 &= \ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u + H(\dot{u} - R_\omega v) + u - \\ &\quad - R_m [(\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) \cos \tilde{\varphi} - 2R_\omega \dot{\beta} \sin \tilde{\varphi}] \sin \tilde{\psi} + \\ &\quad + [(\ddot{\beta} - R_\omega^2 \beta) \sin \tilde{\varphi} + 2R_\omega \dot{\alpha} \cos \tilde{\varphi}] \cos \tilde{\psi} = 0, \\ l_5 &= \ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v + H(\dot{v} + R_\omega u) + v + \\ &\quad + R_m [(\ddot{\alpha} - R_\omega^2 \alpha) \cos \tilde{\varphi} - 2R_\omega \dot{\beta} \sin \tilde{\varphi}] \cos \tilde{\psi} - \\ &\quad - [(\ddot{\beta} - R_\omega^2 \beta) \sin \tilde{\varphi} + 2R_\omega \dot{\alpha} \cos \tilde{\varphi}] \sin \tilde{\psi} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Вводимо нові комплексні змінні

$$q = p + \beta \cos \tilde{\varphi}, \quad X = (u + iv)e^{-i\tilde{\psi}}, \quad Y = \bar{X},$$

$$\Phi = i(\alpha \cos \tilde{\varphi} + i\beta \sin \tilde{\varphi}), \quad F = \bar{\Phi}. \quad (8)$$

Перетворюємо ліві частини рівнянь (7) за алгоритмами

$$L_1 = (l_4 + il_5)e^{-i\tilde{\psi}}, \quad L_2 = \bar{L}_1, \quad L_3 = 2(p_1 + ip_2)e^{-i\tilde{\psi}}, \quad L_4 = \bar{L}_3, \quad L_5 = l_3,$$

$$p_1 = -l_1 \frac{\sin \tilde{\psi}}{\cos \tilde{\varphi}} - l_2 \cos \tilde{\psi}, \quad p_2 = l_1 \frac{\cos \tilde{\psi}}{\cos \tilde{\varphi}} - l_2 \sin \tilde{\psi}. \quad (9)$$

Тоді рівняння першого наближення приймуть вид:

$$L_1 = \ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X + H(\dot{X} + iR_\omega X) + X + R_m(\ddot{\Phi} + 2iR_\omega \dot{\Phi} - R_\omega^2 \Phi) = 0,$$

$$L_2 = \ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y + H(\dot{Y} - iR_\omega Y) + Y + R_m(\ddot{F} - 2iR_\omega \dot{F} - R_\omega^2 F) = 0,$$

$$L_3 = 2\left(\ddot{X} + 2iR_\omega \dot{X} - R_\omega^2 X\right) + \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}}\right) \left(\ddot{\Phi} + h\dot{\Phi} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} \Phi\right) + 2iR_\omega \dot{\Phi} -$$

$$- \operatorname{tg}^2 \tilde{\varphi} \left(\ddot{F} + h\dot{F} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} F\right) + 2iR_\omega q \operatorname{tg} \tilde{\varphi} = 0,$$

$$L_4 = 2\left(\ddot{Y} - 2iR_\omega \dot{Y} - R_\omega^2 Y\right) - \operatorname{tg}^2 \tilde{\varphi} \left(\ddot{\Phi} + h\dot{\Phi} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} \Phi\right) - 2iR_\omega q \operatorname{tg} \tilde{\varphi} +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}}\right) \left(\ddot{F} + h\dot{F} + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}} F\right) - 2iR_\omega \dot{F} = 0,$$

$$L_5 = 2(\dot{q} + hq) + iR_\omega \operatorname{tg} \tilde{\varphi} (\dot{\Phi} - \dot{F}) = 0. \quad (10)$$

Введемо позначення

$$a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2,$$

$$a_{33} = \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \tilde{\varphi}}\right) \left(\lambda^2 + h\lambda + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}}\right) + 2iR_\omega \lambda, \quad a_{34} = \left(\lambda^2 + h\lambda + \frac{R_g^2}{\cos \tilde{\varphi}}\right) \operatorname{tg}^2 \tilde{\varphi},$$

$$a_{35} = R_\omega \operatorname{tg} \tilde{\varphi}, \quad a_{55} = \lambda + h. \quad (11)$$

Тоді характеристичне рівняння прийме вид

$$\Delta = a_{11} \bar{a}_{11} \left[(a_{33} \bar{a}_{33} - a_{34}^2) a_{55} + \lambda (a_{33} + \bar{a}_{33} - 2a_{34}) a_{35}^2 \right] -$$

$$- 2R_m \left[(a_{11} \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11} a_{13}^2) a_{35}^2 \lambda + (a_{11} \bar{a}_{13}^2 a_{33} + \bar{a}_{11} a_{13}^2 \bar{a}_{33}) a_{55} \right] +$$

$$+ 4R_m^2 a_{13}^2 \bar{a}_{13}^2 a_{55} = 0. \quad (12)$$

Тут знак спряження над a_{ij} до λ не відноситься.

Досліджуємо стійкість усталених рухів у випадку, коли маса КВ набагато менша маси ротора і вплив сил ваги незначний. При цьому робимо наступні припущення про малість безрозмірних параметрів:

$$R_m \sim \varepsilon^2, \quad R_g \sim \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (13)$$

У нульовому наближенні (при $R_m=0, R_g=0$) характеристичне рівняння (12) із точністю до сталого множника приймає вид

$$4\lambda^2(\lambda + h) \left[(\lambda + h)^2 + R_\omega^2 \right] \times \\ \times \left[(\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1 \right] \left[(\lambda - iR_\omega)^2 + H(\lambda - iR_\omega) + 1 \right] = 0. \quad (14)$$

Його корені

$$\lambda_0^{(1/2)} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega, \quad \lambda_0^{(3/4)} = -\frac{H}{2} \mp i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + iR_\omega, \\ \lambda_0^{(5/6)} = -h \pm iR_\omega, \quad \lambda_0^7 = -h, \quad \lambda_0^{(8/9)} = 0. \quad (15)$$

Таким чином, у нульовому наближенні характеристичне рівняння має два нульові корені, і решту коренів з від'ємними дійсними частинами. Тому стійкість або нестійкість руху визначатимуть наступні наближення нульових коренів 8, 9. Припустимо, що нульові корені

$$\lambda \sim \varepsilon. \quad (16)$$

Збираючи в характеристичному рівнянні члени найменшого порядку малості щодо ε (порядку ε^2), одержимо наступне рівняння для визначення $\lambda^{(8/9)}$:

$$h(h^2 + R_\omega^2) \lambda^2 \cos^2 \varphi + R_g (R_\omega^2 \sin^2 \varphi + 2h^2) \lambda \cos \varphi + hR_g^2 = 0. \quad (17)$$

Корені квадратного рівняння матимуть від'ємні дійсні частини, якщо усі його коефіцієнти будуть додатними. Останнє буде виконуватися тільки, якщо

$$\cos \tilde{\varphi} > 0, \quad |\tilde{\varphi}| < \pi / 2. \quad (18)$$

З цього випливає, що асимптотично стійкими можуть бути тільки ті усталені рухи, у яких центр мас КВ нижче точки підвісу.

Остаточно можна зробити наступні висновки про стійкість усталених рухів системи у випадку, коли маса КВ набагато менша маси ротора, його ємності вистачає для зрівноважування ротора і вплив сил ваги незначний:

1) на малих швидкостях обертання ротора ($R_{\omega} \sim +0$) єдиний асимптотично стійкий - побічний рух $\tilde{\varphi}_3$, у якому КВ відхилений в більш важкий бік ротора;

2) із наближенням швидкості обертання ротора до резонансної частоти ($R_{\omega} \sim 1-0$) асимптотично стійкий - основний рух $\tilde{\varphi}_1$, у якому ротор зрівноважений і центр мас КВ нижче точки підвісу, і побічні рухи $\tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4$ (за умови існування), у яких КВ відхилений в більш важкий або легкий бік ротора;

3) на зарезонансних швидкостях обертання ротора ($R_{\omega} > 1$) єдиний асимптотично стійкий - основний рух $\tilde{\varphi}_1$.

Список використаної літератури

1. Гусаров А.А., Сусанин В.И., Шаталов Л.Н., Грушин Б.М. Автоматическая балансировка роторов машин. -М.: Наука, 1979. -151 с. 2. Филимоныхин Г.Б. Условия уравновешивания ротора абсолютно твердым телом с неподвижной точкой на оси вала // Доп. НАН України. - 2001. - №1. - С. 65-69. 3. Філімоніхін Г.Б., Сотніков В.С. Автобалансири-демпфери із сферичним рухом корегуючих мас // Збірник наукових праць КДТУ. -2000. Вип. 6, С. 73-75. 4. Филимоныхин Г.Б., Сотников В.С. Установившиеся движения ротора, совершающего плоскопараллельные движения, и автобалансира-демпфера // Збірник наукових праць КДТУ. -2000. Вип. 7, С. 192-199. 5. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 168 с. 6. Найфэ А. Введение в методы возмущений. - М.: Мир, 1984. - 535 с.

**Філімоніхін Г.Б., Сотніков В.С. Дослідження стійкості усталених рухів ротора, що рухається плоскопаралельно і автобалансира-демпфера // Сборник «Вестник НТУУ «КПІ», серия «Машиностроение», 2001. Вип. №41, С.146-151.*