УДК 62-755: 534.1

В.С. Сотніков

СТІЙКІСТЬ УСТАЛЕНИХ РУХІВ АВТОБАЛАНСИРА-ДЕМПФЕРА НА ВЕЛИКИХ ШВИДКОСТЯХ ОБЕРТАННЯ РОТОРА

В [1, 2] описана конструкція нового автобалансира-демпфера (АБД), призначеного для зрівноваження вертикально розташованих роторів і одночасного демпфірування їх вібрацій. В автобалансирі корегуючий вантаж (КВ) має нерухому точку на повздовжній осі ротора і сферичний тензор інерції відносно неї, причому центр ваги КВ не співпадає з нерухомою точкою. В [3] побудована математична модель ротора на ізотропних опорах, що рухається плоскопаралельно, розташований вертикально і зрівноважується АБД. В [4] досліджені усталені рухи системи і сформульовані вимоги до роботоспроможності пристрою. Відповідно до них, для роботоспроможності АБД на певному інтервалі кутових швидкостей обертання ротора необхідно, щоб основні рухи (основний рух) системи були стійкими, а побічні - нестійкими. В цієї роботі досліджується стійкість основних і побічних усталених рухів у випадку ротора, що швидко обертається (R_ω>>1).

Розв'язання рівнянь усталених рухів системи ротор-АБД (одержаних в [4]) у параметричному вигляді має вигляд

$$\tilde{\xi} = -R_m R_\omega^2 e_0 \frac{\Delta_\xi(u)}{\Delta(u)}, \quad \tilde{\eta} = R_m R_\omega^2 e_0 \frac{\Delta_\eta(u)}{\Delta(u)}, \quad \cos\tilde{\varphi} = u, \quad \mathrm{tg}\tilde{\psi} = \frac{\Delta_\xi(u)}{\Delta_\eta(u)}, \qquad (1)$$

$$\Delta(u) = (R_\omega^2 - 1 + \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} u)^2 + H^2 R_\omega^2, \; \Delta_\xi(u) = (R_\omega^2 - 1 + \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} u)\cos\gamma - H R_\omega \sin\gamma,$$

$$\Delta_\eta(u) = HR_\omega \cos\gamma + (R_\omega^2 - 1 + \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} u)\sin\gamma,$$

$$(1-u^2)[(R_\omega^2 - 1 + \frac{R_m R_\omega^4}{R_g^2} u)^2 + H^2 R_\omega^2] = \frac{R_m^2 R_\omega^8}{R_g^4} e_0^2 u^2. \qquad (2)$$

де $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ - усталені значення змінних, що визначають положення системи, R_m, R_ω, R_g, H, e_0, γ - шість безрозмірних параметрів, серед яких R_ω відповідає кутовій швидкості обертання ротора, а e_0 - величині дисбалансу.

Усталені рухи розрізнятимемо по граничним положенням КВ відносно ротора, при необмеженому зростанні кутової швидкості обертання ротора ($R_\omega >> 1$). На рис., а-г зображені граничні положення КВ в істотно відмінних усталених рухах системи у випадку дисбалансу, який може зрівноважити КВ (e_0<1), а на рис., д, е - якого пристрій зрівноважити не може ($e_0 \geq 1$). В першому випадку існують не більше чотирьох істотно відмінних усталених рухи – два основних (рис., а,б), в яких ротор зрівноважений і два побічних (рис., в, г), в яких ротор розбалансований. В другому випадку існують два істотно відмінних рухи – один основний (рис., д), в якому КВ зменшує дисбаланс, і один побічний (рис., е), в якому КВ збільшує дисбаланс.

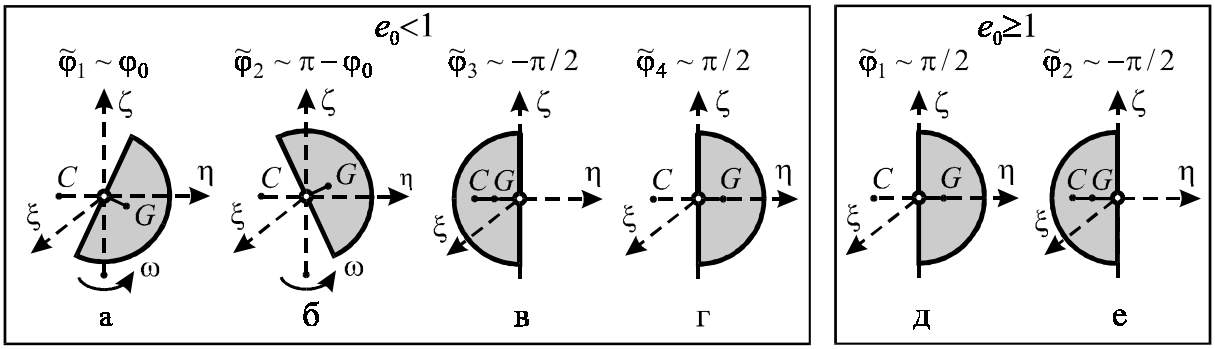

Рисунок. Граничні положення КВ відносно ротора – випадок e_0<1 (а-г), випадок $e_0 \geq 1$ (д, е)

У випадку $e_0<1$ і за наявністю сил зовнішнього опору знаходимо наступні розкладання кутів $\tilde{\varphi}_i$ чи їх косинусів за степенями малого параметру:

$$0 < R_\omega << 1: \quad \exists \quad \tilde{\varphi}_2 = \pi + \tilde{\varphi}_3, \quad \tilde{\varphi}_3 = -\frac{R_m R_\omega^4 e_0}{R_g^2}\left[1 + \left(1 - \frac{H^2}{2}\right)R_\omega^2\right] + \cdots;$$

$$R_\omega \sim 1: \qquad \exists \quad \tilde{\varphi}_1 \approx \arccos\sqrt{u_1}, \quad \tilde{\varphi}_2 \approx \pi - \arccos\sqrt{u_1},$$

$$u_1 = \frac{\cos^2\varphi_0 - b^2}{2} + \sqrt{\frac{(\cos^2\varphi_0 - b^2)^2}{4} + b^2}, \quad b^2 = \frac{H^2 R_g^4}{R_m^2};$$

$$R_\omega >> 1 \quad (\nu = 1/R_\omega << 1):$$

$$\exists\, \tilde{\varphi}_1: \cos\tilde{\varphi}_1 = \cos\varphi_0 + \frac{R_g^2\nu^2}{R_m\cos^2\varphi_0} + \cdots, \quad \tilde{\varphi}_2: \cos\tilde{\varphi}_2 = -\cos\varphi_0 + \frac{R_g^2\nu^2}{R_m\cos^2\varphi_0} + \cdots,$$

$$\tilde{\varphi}_3: \cos\tilde{\varphi}_3 = -\frac{R_g^2\nu^2}{R_m(1+\sin\varphi_0)} + \cdots, \qquad \tilde{\varphi}_4: \cos\tilde{\varphi}_4 = -\frac{R_g^2\nu^2}{R_m(1-\sin\varphi_0)} + \cdots;$$

$$\varphi_0 = \arcsin e_0 \quad (\sin\varphi_0 = e_0, \quad \cos\varphi_0 = \sqrt{1-e_0^2}). \tag{3}$$

У випадку $e_0\geq 1$ і за наявністю сил зовнішнього опору знаходимо наступні розкладання кутів $\tilde{\varphi}_i$ чи їх косинусів за степенями малого параметру:

$$0 < R_\omega << 1: \quad \tilde{\varphi}_1 = \pi + \tilde{\varphi}_2, \quad \tilde{\varphi}_2 = -\frac{R_m R_\omega^4 e_0}{R_g^2}\left[1 + \left(1 - \frac{H^2}{2}\right)R_\omega^2\right] + \cdots;$$

$$R_\omega \sim 1: \quad \exists \quad \tilde{\varphi}_1 \approx \arccos\sqrt{u_1}, \quad \tilde{\varphi}_2 \approx \pi - \arccos\sqrt{u_1},$$

$$u_1 = \frac{1 - e_0^2 - b^2}{2} + \sqrt{\frac{(1-e_0^2-b^2)^2}{4} + b^2}, \quad b^2 = \frac{H^2 R_g^4}{R_m^2};$$

$$R_\omega >> 1 \quad (\nu = 1/R_\omega << 1):$$

$$\exists \quad \tilde{\varphi}_1: \cos\tilde{\varphi}_1 = \frac{R_g^2\nu^2}{R_m(e_0 - 1)} + \cdots, \quad \tilde{\varphi}_2: \cos\tilde{\varphi}_2 = -\frac{R_g^2\nu^2}{R_m(e_0 + 1)} + \cdots. \tag{4}$$

Досліджуємо стійкість усталених рухів відносно змінних

$$x, y, \varphi, \psi, p = \dot{\theta}, \quad \tilde{p} = 0. \tag{5}$$

Вводимо збурений рух у вигляді

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \alpha,\ \ \psi = \tilde{\psi} + \beta,\ \ \xi = -\frac{R_g^2}{R_\omega^2}\,\mathrm{tg}\,\tilde{\varphi}\sin\tilde{\psi} + u,\ \ \eta = \frac{R_g^2}{R_\omega^2}\,\mathrm{tg}\,\tilde{\varphi}\cos\tilde{\psi} + v,\ \ p = p. \quad (6)$$

Йому відповідає таке характеристичне рівняння

$$\Delta(\lambda) = a_{11}\bar{a}_{11}[(a_{33}\bar{a}_{33} - a_{34}^2)a_{55} + \lambda(a_{33} + \bar{a}_{33} - 2a_{34})a_{35}^2] -$$
$$- 2R_m[(a_{11}\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11}a_{13}^2)a_{35}^2\lambda + (a_{11}\bar{a}_{13}^2 a_{33} + \bar{a}_{11}a_{13}^2\bar{a}_{33})a_{55}] + 4R_m^2 a_{13}^2\bar{a}_{13}^2 a_{55} = 0, \quad (7)$$

де:

$$a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2,$$
$$a_{33} = \left(1 + \frac{1}{\cos^2\tilde{\varphi}}\right)\left(\lambda^2 + h\lambda + \frac{R_g^2}{\cos\tilde{\varphi}}\right) + 2iR_\omega\lambda,$$
$$a_{34} = \left(\lambda^2 + h\lambda + \frac{R_g^2}{\cos\tilde{\varphi}}\right)\mathrm{tg}^2\,\tilde{\varphi}, \quad a_{35} = R_\omega\,\mathrm{tg}\,\tilde{\varphi}, \quad a_{55} = \lambda + h, \quad (8)$$

причому в (8) знак комплексного спряження над a_{ij} до λ не відноситься.

Стійкість чи нестійкість усталених рухів визначається дійсними частинами коренів характеристичного рівняння (7). Оскільки корені в загальному випадку визначити неможливо, визначатимемо їх у вигляді асимптотичних рядів за степенями малого параметру. У випадку ротора, що швидко обертається

$$R_\omega >> 1, \quad \nu = 1/R_\omega, \quad \nu << 1. \quad (9)$$

Характеристичне рівняння перетворюємо до вигляду

$$\Delta(\mu) = b_{11}\bar{b}_{11}\left[(b_{33}\bar{b}_{33} - b_{34}^2)b_{55} + \mu(b_{33} + \bar{b}_{33} - 2b_{34})\frac{1-u^2}{u^2}\right] -$$
$$- 2R_m\left[(b_{11}\bar{b}_{13}^2 + \bar{b}_{11}b_{13}^2)\frac{1-u^2}{u^2}\mu + (b_{11}\bar{b}_{13}^2\bar{b}_{33} + \bar{b}_{11}b_{13}^2\bar{b}_{33})b_{55}\right] + 4R_m^2 b_{13}^2\bar{b}_{13}^2 b_{55} = 0. \quad (10)$$

де:

$$b_{11} = (\mu + i)^2 + H\nu(\mu + i) + \nu^2,\ \ b_{13} = (\mu + i)^2,\ \ b_{33} = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)\left(\mu^2 + h\nu\mu + \frac{\nu^2}{u}\right) + 2i\mu,$$
$$b_{34} = \left(\mu^2 + h\nu\mu + \frac{\nu^2}{u}\right)\frac{1-u^2}{u^2},\ \ b_{55} = \mu + \nu h,\ \ \mu = \frac{\lambda}{\nu},\ \ u = \cos\tilde{\varphi}_i,\ \ i \in \{1,2,3,4\}. \quad (11)$$

причому в (11) знак комплексного спряження над b_{ij} до μ не відноситься.

Досліджуємо стійкість основних усталених рухів $\widetilde{\varphi}_{1,2}$ (e_0<1). Розкладання коренів характеристичного рівняння (10) по степеням ν отримуємо з використанням розкладань (3). Одержуємо

$$\mu^{(1/2)} \approx -\frac{H}{2}\nu \pm i\left[\nu\sqrt{1-\left(\frac{H}{2}\right)^2}+1\right],\quad \mu^{(3/4)} \approx -\frac{H}{2}\nu \pm i\left[\nu\sqrt{1-\left(\frac{H}{2}\right)^2}-1\right],$$

$$\mu^{(5/6)} \approx -\frac{\nu}{2(1-R_m)}\left[\frac{h[\sin^2\widetilde{\varphi}+2R_m^2(1-R_m)\cos^4\widetilde{\varphi}]}{(1-R_m\cos^2\widetilde{\varphi})(\sin^2\widetilde{\varphi}+R_m\cos^2\widetilde{\varphi})}+\frac{HR_m[1+(1-2R_m)\cos^2\widetilde{\varphi}]}{1-R_m\cos^2\widetilde{\varphi}}\right]\pm$$

$$\pm i\sqrt{\frac{R_m(\sin^2\widetilde{\varphi}+R_m\cos^2\widetilde{\varphi})}{(1-R_m)(1-R_m\cos^2\widetilde{\varphi})}},\quad \mu^{(7/8)} \approx -h\nu \pm i,\quad \mu^{(9)} \approx -\frac{\nu h R_m\cos^2\widetilde{\varphi}}{\sin^2\widetilde{\varphi}+R_m\cos^2\widetilde{\varphi}}. \quad (12)$$

Отже, основні рухи стійкі при будь-яких обмежених дисбалансах.

Числові дослідження показують, що другий основний рух $\widetilde{\varphi}_2$, при зростанні кутової швидкості обертання ротора, декілька разів із нестійкого стає асимптотично стійким. З умови, що це викликано зміною знаку дійсного кореня ($\Delta(0)$), знаходимо дві критичні швидкості для цього руху

$$\nu_1 \approx \sqrt{-\rho\cos\widetilde{\varphi}_2},\quad \nu_2 \approx \sqrt{-\rho\cos^3\widetilde{\varphi}_2},\quad \rho = R_m/R_g,\quad \rho << 1. \quad (13)$$

Числові дослідження коренів характеристичного рівняння показують наступне:

$$\forall\ R_\omega > 1/\nu_2 \quad \mathrm{Re}\ \mu^{(i)} < 0,\quad /i=\overline{1,9}/;$$
$$\forall\ R_\omega \in (1/\nu_1, 1/\nu_2)\ \ \exists\ i\in\{1,2,\ldots 9\}:\ \mu^{(i)}\in \mathrm{R}^1,\ \mu^{(i)}>0;$$
$$\exists\ e_0<1,\ \ \nu(e_0):\ \nu_1<\nu(e_0)<1,$$
$$\forall\ R_\omega \in (1/\nu(e_0), 1/\nu_1)\ \ \mathrm{Re}\ \mu^{(i)}<0,\quad /i=\overline{1,9}/;$$
$$\forall\ R_\omega \in (0, 1/\nu(e_0))\ \ \exists\ i\in\{1,2,\ldots 9\}:\ \mathrm{Re}\ \mu^{(i)}>0. \quad (14)$$

Таким чином, при певних дисбалансах, другий основний рух може бути стійким на швидкостях, менших $1/\nu_1$, але стійкість в цьому випадку втрачається при переході швидкості $1/\nu(e_0)$ за рахунок появи пари комплексно спряжених коренів з додатними дійсними частинами.

У випадках побічного руху $\tilde{\varphi}_4$ (e_0<1), чи основного руху $\tilde{\varphi}_1$ (e_0>1) отримаємо наступні розкладання коренів характеристичного рівняння

$$\mu^{(1/2)} \approx -\frac{H}{2}\nu \pm i\left[\nu\sqrt{1-\left(\frac{H}{2}\right)^2}+1\right],\quad \mu^{(3/4)} \approx -\frac{H}{2}\nu \pm i\left[\nu\sqrt{1-\left(\frac{H}{2}\right)^2}-1\right],$$

$$\mu^{(5/6)} \approx -\frac{1}{2}h\nu\frac{R_m(e_0-1)+2R_g}{R_m(e_0-1)+R_g} \pm i\sqrt{\frac{R_m(e_0-1)+R_g}{R_g}},$$

$$\mu^{(7/8)} \approx -\frac{1}{2}\nu\frac{h+HR_m}{1-R_m} \pm i\sqrt{\frac{R_m(e_0-1+R_g)}{R_g(1-R_m)}},\quad \mu^{(9)} \approx -\frac{(e_0-1)hR_m\nu}{R_g+R_m(e_0-1)}. \qquad (15)$$

Отже, можна зробити висновок, що побічний рух $\tilde{\varphi}_4$ (e_0<1) нестійкий, а основний $\tilde{\varphi}_1$ (e_0>1) – асимптотично стійкий:

$$\forall e_0 : e_0<1\ (\tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}_4)\ \exists\ i\in\{8,9\} : \mathrm{Re}\,\mu^{(i)}>0;$$
$$\forall e_0 : e_0>1\ (\tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}_1)\quad \mathrm{Re}\,\mu^{(i)}<0,\quad /i=\overline{1,9}/. \qquad (16)$$

У випадках побічних рухів $\tilde{\varphi}_3$ (e_0<1), чи $\tilde{\varphi}_2$ (e_0>1) отримаємо таки корені характеристичного рівняння

$$\mu^{(1/2)} \approx -\frac{H}{2}\nu \pm i\left[\nu\sqrt{1-\left(\frac{H}{2}\right)^2}+1\right],\quad \mu^{(3/4)} \approx -\frac{H}{2}\nu \pm i\left[\nu\sqrt{1-\left(\frac{H}{2}\right)^2}-1\right],$$

$$\mu^{(5/6)} \approx -\frac{1}{2}h\nu\frac{2R_g-R_m(e_0+1)}{R_g-R_m(e_0+1)} \pm i\sqrt{\frac{R_g-R_m(e_0+1)}{R_g}},$$

$$\mu^{(7/8)} \approx -\frac{1}{2}\nu\frac{h+HR_m}{1-R_m} \pm i\sqrt{\frac{R_m(e_0+1-R_g)}{R_g(1-R_m)}},\quad \mu^{(9)} \approx \frac{(e_0+1)hR_m\nu}{R_g-R_m(e_0+1)}. \qquad (17)$$

З коренів можна зробити висновок, що рухи нестійкі:

$$\forall e_0>0\ (e_0<1,\ \tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}_3;\ e_0>1,\ \tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}_2)\ \exists\ i\in\{8,9\} : \mathrm{Re}\,\mu^{(i)}>0. \qquad (18)$$

Остаточно, у випадку ротора, що швидко обертається ($R_\omega >> 1$), можна зробити наступні висновки:

1) у випадку дисбалансу, який може зрівноважити КВ (e_0<1), основні рухи $\tilde{\varphi}_{1,2}$ асимптотично стійкі, а побічні $\tilde{\varphi}_{3,4}$ - нестійкі;

2) у випадку дисбалансу, який не може зрівноважити КВ (e_0>1), основний рух $\tilde{\varphi}_1$ асимптотично стійкий, а побічний $\tilde{\varphi}_2$ - нестійкий;

3) на великих швидкостях обертання ротора АБД роботоспроможен.

ЛІТЕРАТУРА

1. Філімоніхін Г.Б., Сотніков В.С. Автобалансири-демпфери із сферичним рухом корегуючих мас // Збірник наукових праць КДТУ. -2000. Вип. 6, С. 73-75.

2. Сотніков В.С., Філімоніхін Г.Б. Автобалансуючий пристрій / Патент України № 40768 А по кл. G 01 M 1/38, -2001, Бюл.№7

3. Філімоніхін Г.Б., Сотніков В.С. Модель ротора, що здійснює плоскопаралельний рух і зрівноважується корегуючим вантажем з нерухомою точкою на осі ротора // Наукові вісти НТУУ “КПІ”, -2001. №4 (18), С. 122-126.

4. Филимонихин Г.Б., Сотников В.С. Установившиеся движения ротора, совершающего плоскопараллельные движения, и автобалансира-демпфера // Збірник наукових праць КДТУ. -2000. Вип. 7, С. 192-199.